数值计算方法

数值积分

张晓平

2019 年 11 月 24 日

武汉大学数学与统计学院

Table of contents

简介

简介

定理：Newton-Leibniz 公式

对于定积分 $I = \int_a^b f(x)\,dx$，若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a).$$

简介

实际计算中，常遇到如下情况：

1. $f(x)$ 形式复杂，求原函数更为困难，如

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

2. $f(x)$ 的原函数不能用初等函数形式表示，如

$$f(x)=\frac{1}{\ln x},\quad e^{-x^2},\quad \sin x^2,\quad \frac{\sin x}{x}$$

3. $f(x)$ 虽有初等函数表示的原函数，但其原函数表示形式相当复杂，如

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}$$

4. $f(x)$ 本身没有解析表达式，其函数关系由表格或图像给出，如实验或测量数据

以上情况都不能用牛顿 - 莱布尼兹公式直接计算定积分，因此有必要研究定积分的数值计算问题。

Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式

数值积分的基本思想

数值积分的基本思想

定理：积分中值定理

对于连续函数 $f(x)$，在 $[a,b]$ 内存在点 ξ 有

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi),\quad \xi\in[a,b].$$

ξ 一般不知道，从而难以准确计算 $f(\xi)$ 的值。**通常称 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均高度。** 若能对 $f(\xi)$ 提供一种近似，就能得到对应的数值积分公式。

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)f(a),\qquad \Rightarrow \text{左矩形公式} \tag{1}$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)f(b),\qquad \Rightarrow \text{右矩形公式} \tag{2}$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\qquad \Rightarrow \text{中矩形公式} \tag{3}$$

数值积分的基本思想

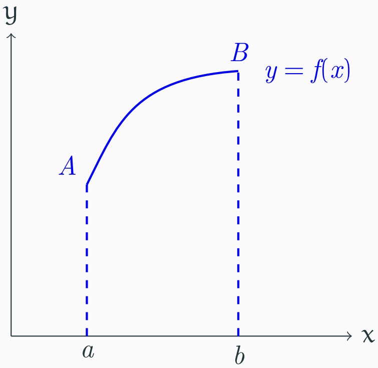


图 1: 左矩形公式

数值积分的基本思想

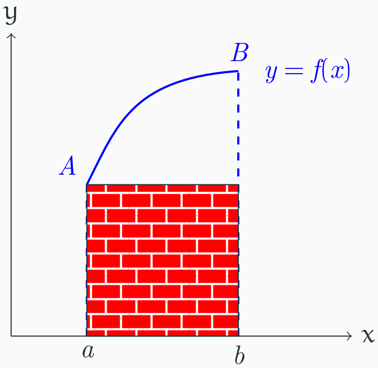


图 1: 左矩形公式

数值积分的基本思想

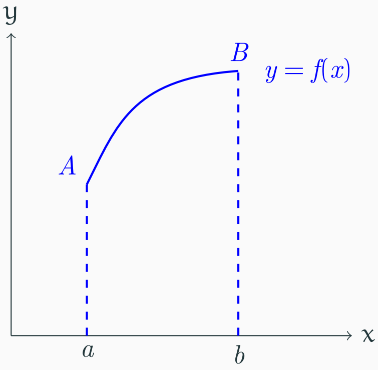


图 2: 右矩形公式

数值积分的基本思想

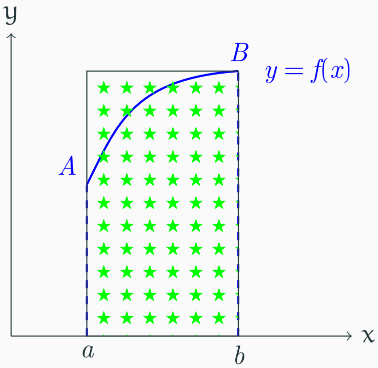


图 2: 右矩形公式

数值积分的基本思想

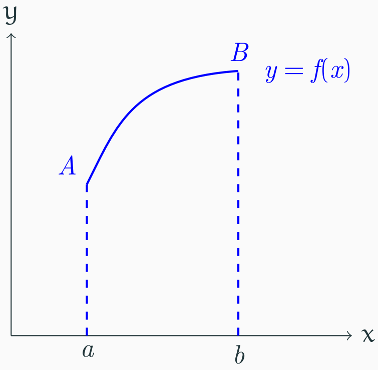


图 3: 中矩形公式

数值积分的基本思想

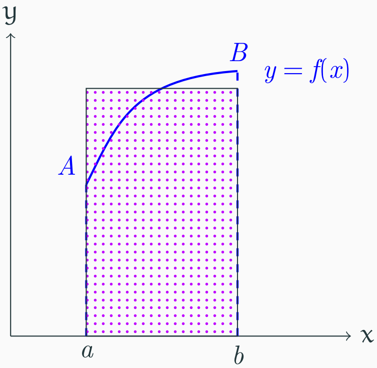


图 3: 中矩形公式

数值积分的基本思想

更一般地，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 内 $n+1$ 个节点 x_i 处的高度为 $f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，通过加权平均的方法近似地得到平均高度 $f(\xi)$，这类公式一般形如

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \tag{4}$$

称x_i **为求积节点**，A_i **为求积系数**。

称

$$R_n(f)=\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

为求积公式 (4) 的截断误差。

Newton-Cotes 公式

插值型求积公式

插值型求积公式

设 $[a, b]$ 上的节点为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，则 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式为

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i), \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

用 $L_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b l_i(x)\,dx \right) f(x_i). \end{aligned}$$

记 $A_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$，则有**插值型求积公式**

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中 A_i 只与插值节点 x_i 有关，而与被积函数 $f(x)$ 无关

插值型求积公式

上述求积公式的截断误差为

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b [f(x) - L_n(x)]\,dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)\,dx \end{aligned}$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a, b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \dfrac{b-a}{n}$。

Newton-Cotes 公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a,b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \dfrac{b-a}{n}$。作变量替换 $x = a + th$，则

$$
\begin{aligned}
A_i &= \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx = h\int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}\, dt \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (t-j)\, dt
\end{aligned}
$$

Newton-Cotes 公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a, b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \dfrac{b-a}{n}$。作变量替换 $x = a + th$，则

$$
\begin{aligned}
A_i &= \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}\, dt \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (t-j)\, dt
\end{aligned}
$$

记

$$
C_i^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (t-j)\, dt \quad \Rightarrow \quad A_i = (b-a)\, C_i^{(n)}
$$

Newton-Cotes 公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a, b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \dfrac{b-a}{n}$。作变量替换 $x = a + th$，则

$$
\begin{aligned}
A_i &= \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}\, dt \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (t-j)\, dt
\end{aligned}
$$

记

$$
C_i^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (t-j)\, dt \quad \Rightarrow \quad A_i = (b-a)C_i^{(n)}
$$

于是得到Newton-Cotes **求积公式**

$$
I = \int_a^b f(x)\, dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)
$$

$C_i^{(n)}$ 成为柯特斯系数。

Newton-Cotes 公式

柯特斯系数 $C_i^{(n)}$

1 对称性:

$$C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$$

2 权性:

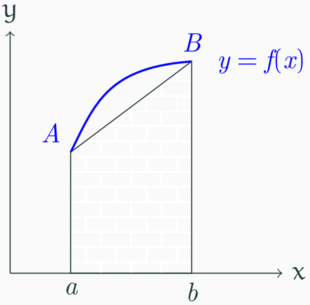
$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} = 1$$

Newton-Cotes 公式

- $n = 1$ （梯形 (Trapezoidal) 公式）

$$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

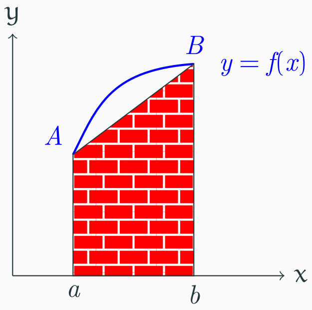


Newton-Cotes 公式

- $n = 1$ （梯形 (Trapezoidal) 公式）

$$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$



Newton-Cotes 公式

- $n=2$ （辛普森 (Simpson) 公式）

$$C_0^{(2)}=C_2^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)\,dt=\frac{1}{6},\quad C_1^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2 t(t-2)\,dt=\frac{4}{6}$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

- $n=3$ （辛普森 (Simpson)3/8 公式）

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]$$

- $n=4$ （柯特斯 (Cotes) 公式）

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]$$

Newton-Cotes 公式

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

由表可看出，当 n 较大时，柯特斯西系数变得复杂，且出现负项，计算过程的稳定性没有保证。梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式是最基本、最常用的求积公式。

定理：截断误差

1 若 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则梯形公式的截断误差为

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

2 若 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则辛普森公式的截断误差为

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

3 若 $f^{(6)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则柯特斯公式的截断误差为

$$R_4(f) = -\frac{(b-a)^7}{1013760} f^{(4)}(\xi) = -\frac{8}{495}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Newton-Cotes 公式

例

试分别用梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式计算 $I = \int_{1/2}^{1} \sqrt{x}\, dx$，并与精确解进行比较。

例

试分别用梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式计算 $I=\int_{1/2}^{1}\sqrt{x}\,dx$，并与精确解进行比较。

解

精确解为 $I=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_{0.5}^{1}=0.42096441$

1 梯形公式：$I\approx\dfrac{0.5}{2}(\sqrt{0.5}+1)\approx0.4267767$

2 辛普森公式：$I\approx\dfrac{0.5}{6}(\sqrt{0.5}+4\sqrt{0.75}+1)\approx0.43093403$

3 柯特斯公式：
$I\approx\dfrac{0.5}{90}(7\sqrt{0.5}+32\sqrt{0.625}+12\sqrt{0.75}+32\sqrt{0.875}+7)\approx 0.43096407$

复化求积公式及龙贝格求积公式

复化求积公式及龙贝格求积公式

复化求积公式

复化求积公式

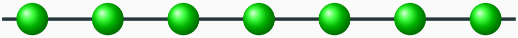
定义：复化求积公式

为提高数值积分的精度，将 $[a, b]$ 等分为 n 个子区间，在每个区间上用基本求积公式，然后再累加成新的求积公式，这样既可提高结果的精度，又可使算法简便易于实现。这种求积公式成为复化求积公式。

复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

1. 复化梯形公式
   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式，有
   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
   累加得复化梯形公式
   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{2}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

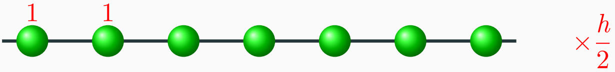
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

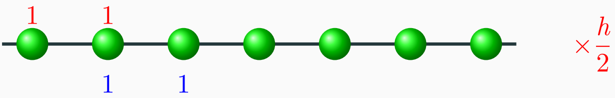
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

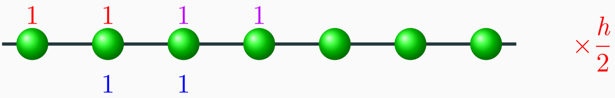
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化梯形公式

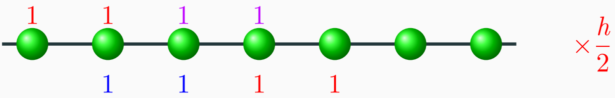
$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

1. 复化梯形公式
   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式，有
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
   累加得复化梯形公式
$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

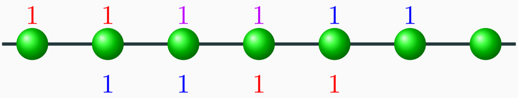
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{2}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$， $h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

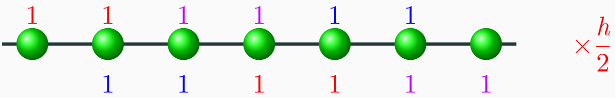
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

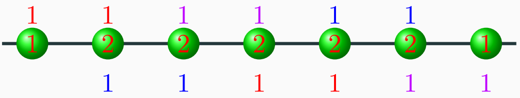
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{2}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化 Simpson 公式

   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \end{aligned}$$

$\times \frac{h}{6}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0,1,\cdots,n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i = 1,2,\cdots,n)$。

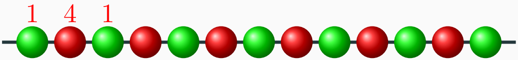
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right. \end{aligned}$$

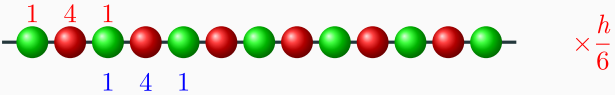


$\times \frac{h}{6}$

复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

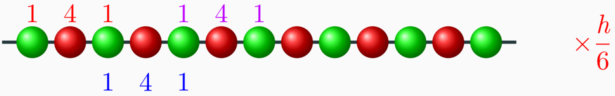
1. 复化 Simpson 公式
   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用 Simpson 公式，有
   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
   累加得复化 Simpson 公式
   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

1. 复化 Simpson 公式
   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用 Simpson 公式，有
   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
   累加得复化 Simpson 公式
   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

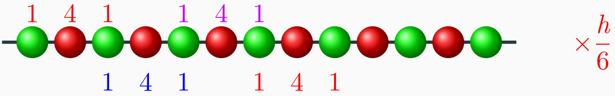
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化 Simpson 公式

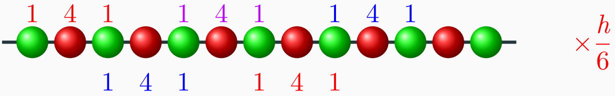
   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

1. 复化 Simpson 公式
   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用 Simpson 公式，有
   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
   累加得复化 Simpson 公式
   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right.\end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

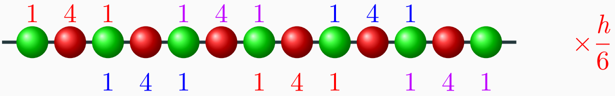
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)],\quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \end{aligned}$$



将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

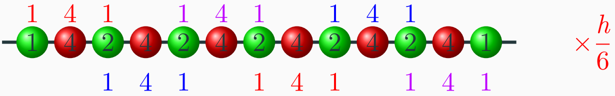
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

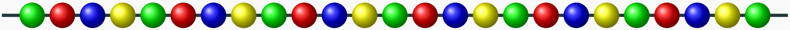
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

$$\begin{aligned} I \approx \frac{h}{90}\Bigg[&7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{90}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

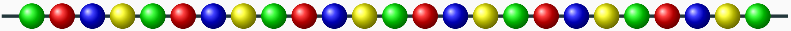
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

   $$\begin{aligned} I \approx \frac{h}{90}\Bigg[&7f(a)+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}})+12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}})+14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

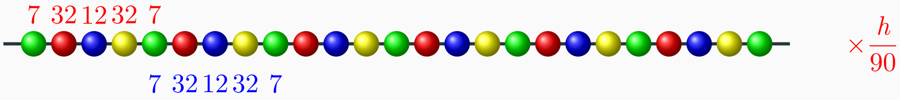
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

   $$I \approx \frac{h}{90}\Bigg[7f(a)+32\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{4}})+12\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}}) +32\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{3}{4}})+14\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+7f(b)\Bigg]\equiv C_n$$



复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

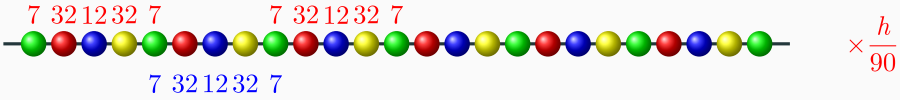
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

   $$\begin{aligned} I \approx \frac{h}{90}\Bigg[&7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

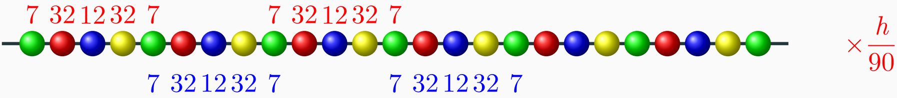
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

   $$I \approx \frac{h}{90}\left[7f(a)+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}})+12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) +32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}})+14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+7f(b)\right] \equiv C_n$$



复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

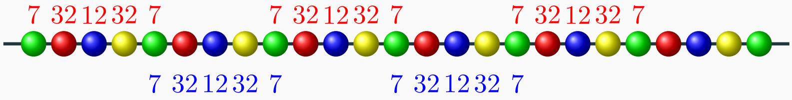
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

$$\begin{aligned} I \approx \frac{h}{90}\Bigg[& 7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ & +32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{90}$

复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

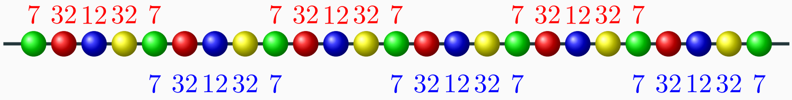
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

$$\begin{aligned} I \quad \approx \quad & \frac{h}{90}\Bigg[7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ & +32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$

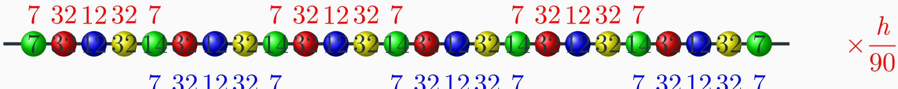


$\times \frac{h}{90}$

复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

1. 复化柯特斯公式
   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有
   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$
   累加得复化柯特斯公式
   $$\begin{aligned} I \approx\ & \frac{h}{90}\left[7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})\right. \\ & \left. +32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\right] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

复化求积公式

定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

$$R_S(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

复化求积公式

定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数，则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

$$R_S(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

$$R_C(f) = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

复化求积公式

例

计算 $I = \int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点？

复化求积公式

例

计算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点？

解

$f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

复化求积公式

例

计算 $I = \int_0^1 e^x\, dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点？

解

$f(x) = f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)| \leqslant \frac{e}{12n^2} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 67.3$$

复化求积公式

例

计算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点？

解

$f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)|\leqslant\frac{e}{12n^2}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68，即需 69 个节点。

复化求积公式

例

计算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点？

解

$f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)|\leqslant \frac{e}{12n^2}\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68，即需 69 个节点。由复化 Simpson 公式的截断误差知

$$|R_S(f)|\leqslant \frac{e}{2880n^4}\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>2.1$$

例

计算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点？

解

$f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)|\leqslant\frac{e}{12n^2}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68，即需 69 个节点。由复化 Simpson 公式的截断误差知

$$|R_S(f)|\leqslant\frac{e}{2880n^4}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>2.1$$

复化求积公式及龙贝格求积公式

变步长求积公式

变步长求积公式

将 $[a,b]n$ 等分，共 $n+1$ 个节点，复化梯形公式为

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

变步长求积公式

将 $[a,b]n$ 等分，共 $n+1$ 个节点，复化梯形公式为

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

将 $[a,b]2n$ 等分，共 $2n+1$ 个节点。为讨论二分前后两个积分值的关系，考察一个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$，其中点为 $x_{i+\frac{1}{2}}$，该子区间上二分前后两个积分值为

$$T_1 = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right], \quad T_2 = \frac{h}{4}\left[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right]$$

两者关系为

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h}{2}f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

累加得

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

变步长求积公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

实际计算 T_{2n} 时，T_n 为已知数据，只需累加新增节点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 的函数值 $f(x_{i+\frac{1}{2}})$，这可使计算量节约一半。

变步长求积公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

实际计算 T_{2n} 时，T_n 为已知数据，只需累加新增节点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 的函数值 $f(x_{i+\frac{1}{2}})$，这可使计算量节约一半。

常用 $T_{2n} - T_n < \epsilon$ 是否满足作为控制计算精度的条件：

1. 若满足，则取 T_{2n} 为 I 的近似值
2. 若不满足，则再将区间分半，直到满足精度为止。

复化求积公式及龙贝格求积公式

龙贝格求积公式

龙贝格求积公式

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4}\frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a, b]$ 上变化不大，即有 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍，即

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4}$$

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4}\frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a, b]$ 上变化不大，即有 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍，即

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow I \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{4}T_n \equiv T^*$$

T^* 应当比 T_{2n} 更接近 I。

龙贝格求积公式

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4}\frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a, b]$ 上变化不大，即有 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍，即

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ I \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{4}T_n \equiv T^*$$

T^* 应当比 T_{2n} 更接近 I。易验证

$$S_n = T^*$$

龙贝格求积公式

由复化 Simpson 公式逐步二分，有

$$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} = \frac{1}{16}$$

龙贝格求积公式

由复化 Simpson 公式逐步二分，有

$$\frac{I-S_{2n}}{I-S_n}=\frac{1}{16}\quad\Rightarrow\quad I\approx\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n\equiv S^*$$

易验证

$$C_n=S^*$$

龙贝格求积公式

由复化柯特斯公式逐步二分，有

$$\frac{I - C_{2n}}{I - C_n} = \frac{1}{64}$$

龙贝格求积公式

由复化柯特斯公式逐步二分，有

$$\frac{I - C_{2n}}{I - C_n} = \frac{1}{64} \quad \Rightarrow \quad I \approx \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n \equiv R_n$$

该公式称为**龙贝格公式**

龙贝格求积公式

如此进行三次，便将粗糙的梯形公式逐步加工成精度较高的龙贝格公式，这种加速方法成为龙贝格算法，计算步骤如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
\hline
T_1 & & & & & & \\
\downarrow & \searrow & & & & & \\
T_2 & \longrightarrow & S_1 & & & & \\
\downarrow & \searrow & & \searrow & & & \\
T_4 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & C_1 & & \\
\downarrow & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T_8 & \longrightarrow & S_3 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & R_1 \\
\downarrow & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T_{16} & \longrightarrow & S_4 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & R_2 \\
\hline
\end{array}$$

龙贝格求积公式

例

用龙贝格算法计算 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$

龙贝格求积公式

例

用龙贝格算法计算 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$

解

k	$n=2^k$	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1	3			
1	2	3.1	3.133333		
2	4	3.131177	3.141569	3.142118	
3	8	3.138989	3.141593	3.141595	3.141586
4	16	3.140942	3.141593	3.141593	3.141593
5	32	3.141430	3.141593	3.141593	3.141593

高斯型求积公式

高斯型求积公式

代数精度

代数精度

定义

若求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对任意次数不高于 m 次的代数多项式都准确成立，但对于 $m+1$ 次多项式不精确成立，则该求积公式具有m 次代数精度。

代数精度

定义

若求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对任意次数不高于 m 次的代数多项式都准确成立，但对于 $m+1$ 次多项式不精确成立，则该求积公式具有m **次代数精度**。

由该定义可看出：求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_k f(x_k)$$

具有 m 次代数精度的充要条件是**该公式对** $f(x) = 1, x, \cdots, x^m$ **能准确成立**，**但对** $f(x) = x^{m+1}$ **不能准确成立**。

代数精度

定理

含 $n+1$ 个节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的插值型求积公式的代数精度至少为 n

代数精度

定理

牛顿-科特斯公式的代数精度至少为 n。特别地，当 n 为偶数时，牛顿-科特斯公式的代数精度可以达到 $n+1$。

代数精度

定理

牛顿-科特斯公式的代数精度至少为 n。特别地，当 n 为偶数时，牛顿-科特斯公式的代数精度可以达到 $n+1$。

证明

下验证当 $n=2k$ 时，公式对 $f(x)=x^{n+1}$ 精确成立。由误差

$$
\begin{aligned}
R &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\,dx \\
&\xlongequal{x=a+ih} h^{n+2}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\,dt \\
&\xlongequal{n=2k} h^{n+2}\int_0^{2k} t(t-1)\cdots(t-k)(t-k-1)\cdots(t-2k-1)(t-2k) \\
&\xlongequal{u=t-k} h^{n+2}\int_{-k}^{k} (u+k)(u+k-1)\cdots u(u-1)\cdots(u-k+1)(u-k) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

高斯型求积公式

高斯型求积公式

高斯型求积公式

当节点等距时，插值型求积公式的代数精度为 n 或 $n+1$。若对节点适当选择，可提高插值型求积公式的代数精度。对具有 $n+1$ 个节点的插值型求积公式，其代数精度最高可达 $2n+1$。

高斯型求积公式

定义

将 $n+1$ 个节点的具有 $2n+1$ 次代数精度的插值型求积公式为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

称为高斯型求积公式，节点 x_k 为高斯点，A_k 为高斯系数。

高斯型求积公式

以 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ 为例，一点高斯公式为中矩形公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2f(0),$$

高斯点为 $x_0 = 0$，系数为 $A_0 = 2$。

高斯型求积公式

以 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ 为例，两点高斯公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

具有三次代数精度，即要求对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 准确成立，有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2, \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0, \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3}, \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

可解得 $x_0 = -x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$， $A_0 = A_1 = 1$，公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

高斯型求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)\,dt$$

对应的两点高斯型求积公式为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a-b}{2\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right)\right]$$

高斯型求积公式

定理

节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为高斯点的充分必要条件是以这些点为零点的多项式 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 与任意次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交，即

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\,dx=0.$$

证明

$\Rightarrow$ 设 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为插值型求积公式的高斯点，$P(x)$ 为次数不超过 n 的多项式，则 $P(x)\omega_{n+1}(x)$ 为次数不超过 $2n+1$ 的多项式。由高斯点定义知

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}A_kP(x_k)\omega_{n+1}(x_k)=0$$

高斯型求积公式

证明（续）：

$\Leftarrow$ 设 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意的次数不超过 n 的多项式正交，设 $f(x)$ 是任一次数不超过 $2n+1$ 的多项式，则必存在次数不超过 n 的多项式 $P(x), Q(x)$，使得

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + Q(x)$$

高斯型求积公式

证明（续）：

$\Leftarrow$ 设 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意的次数不超过 n 的多项式正交，设 $f(x)$ 是任一次数不超过 $2n+1$ 的多项式，则必存在次数不超过 n 的多项式 $P(x), Q(x)$，使得

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + Q(x)$$

由插值型求积公式至少具有 n 次代数精度，知

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\,dx + \int_a^b Q(x)\,dx \\
&= 0 + \int_a^b Q(x)\,dx = 0 + \sum_{k=0}^{n} A_k Q(x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k[P(x_k)\omega_{n+1}(x_k) + Q(x_k)] = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)
\end{aligned}$$

高斯型求积公式

证明（续）：

于是，求积公式至少具有 $2n+1$ 次代数精度，而对于 $2n+2$ 次多项式 $f(x) = \omega_{n+1}^2(x)$，有 $\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\,dx > 0$。所以，求积公式的代数精度为 $2n+1$，$x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为高斯点。

高斯型求积公式

1 具有 $n+1$ 个节点的插值型求积公式的代数精度最高可达到 $2n+1$，因此高斯型求积公式是代数精度最高的求积公式。

2 定理给出了求高斯点的方法：找与任意的次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交的多项式

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

其零点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 即为高斯点。

高斯型求积公式

例

证明求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{0.6}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{0.6})]$$

对于不高于 5 次的多项式准确成立，并计算 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,dx$（取 5 位有效数字）

高斯型求积公式

勒让德多项式

勒让德多项式

定义

以高斯点 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为零点的 n 次多项式

$$P_n(x)=\omega_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$$

勒让德多项式

在 $[-1,1]$ 上，勒让德多项式为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

如：

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}, \\ P_3(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x, \\ P_4(x) &= x^4 - \frac{30}{35}x^2 + \frac{3}{35}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

勒让德多项式

这样，可先求勒让德多项式的零点即可求得高斯点 x_k，进而求出求积系数 A_k，如三点高斯型求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$