

数值计算方法

插值法

张晓平

2019 年 11 月 4 日

武汉大学数学与统计学院

Table of contents

1. 简介
2. 拉格朗日插值
3. 分段低次插值
4. 差商与牛顿插值多项式
5. 差分与等距节点插值

简介

- 在离散数据的基础上补插连续函数，使得这条连续曲线通过全部给定的离散数据点。
- 插值是离散函数逼近的重要方法，利用它可通过函数在有限个点处的取值状况，估算出函数在其他点处的近似值。
- 插值：用来填充图像变换时像素之间的空隙。

- 早在 6 世纪，中国的刘焯已将等距二次插值用于天文计算。
- 17 世纪之后，I. 牛顿，J.-L. 拉格朗日分别讨论了等距和非等距的一般插值公式。
- 在近代，插值法仍然是数据处理和编制函数表的常用工具，又是数值积分、数值微分、非线性方程求根和微分方程数值解法的重要基础，许多求解计算公式都是以插值为基础导出的。

定义：插值问题

通过 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 中互异的 $n+1$ 个点 x_0, x_1, \dots, x_n 处的值 y_0, y_1, \dots, y_n , 构造一个简单函数 $P(x)$ 作为 $y = f(x)$ 的近似表达式

$$y = f(x) \approx P(x)$$

定义：插值问题

通过 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 中互异的 $n+1$ 个点 x_0, x_1, \dots, x_n 处的值 y_0, y_1, \dots, y_n , 构造一个简单函数 $P(x)$ 作为 $y = f(x)$ 的近似表达式

$$y = f(x) \approx P(x) \rightarrow \text{插值函数}$$

定义：插值问题

通过 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 中互异的 $n+1$ 个点 x_0, x_1, \dots, x_n 处的值 y_0, y_1, \dots, y_n , 构造一个简单函数 $P(x)$ 作为 $y = f(x)$ 的近似表达式

$$y = f(x) \approx P(x) \rightarrow \text{插值函数}$$

使得

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

1 代数插值

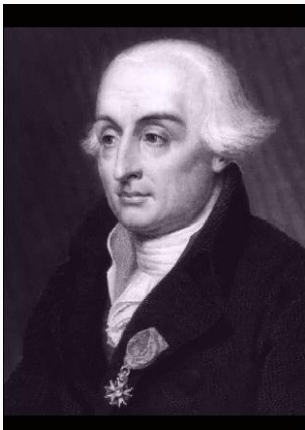
插值函数为代数多项式

2 三角插值

插值函数为三角多项式

- 插值几乎应用于所有需要进行图像缩放功能的领域内，如数码相机、图像处理软件（如 Photoshop）。
- 图像插值就是利用已知邻近像素点的灰度值来产生未知像素点的灰度值，以便由原始图像再生出具有更高分辨率的图像。

拉格朗日插值



约瑟夫·拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813)，法国著名数学家、物理学家。1736年1月25日生于意大利都灵，1813年4月10日卒于巴黎。他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献，其中尤以数学方面的成就最为突出，拿破仑曾称赞他是“一座高耸在数学界的金字塔”。

拉格朗日插值

代数插值问题

定义：代数插值问题

设 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个不同点 $a=x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的函数值为 y_0, y_1, \cdots, y_n , 若存在一个多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

使得

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \quad (1)$$

称

- $P_n(x)$ 为 $y=f(x)$ 的插值多项式
- x_0, x_1, \cdots, x_n 为插值节点
- $[a, b]$ 为插值区间
- (1) 为插值条件

代数插值问题

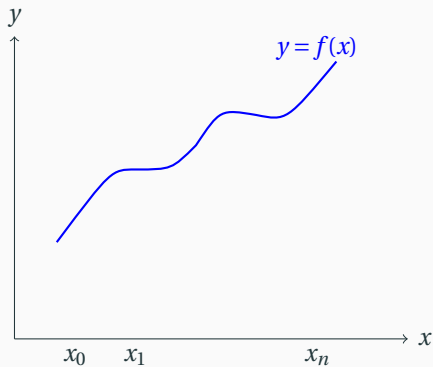


图 1: 代数插值

几何意义: 通过 $n+1$ 个点 $(x_i, y_i) (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 做一条代数曲线 $y = P_n(x)$, 使其近似于 $y = f(x)$

代数插值问题

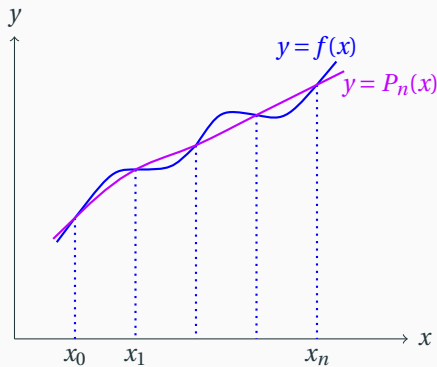


图 1: 代数插值

几何意义: 通过 $n+1$ 个点 $(x_i, y_i) (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 做一条代数曲线 $y = P_n(x)$, 使其近似于 $y = f(x)$

在 $[a, b]$ 上用 $P_n(x)$ 近似 $f(x)$, 除了在插值节点 x_i 处 $P_n(x_i) = f(x_i)$ 外, 在其余点处有误差

在 $[a, b]$ 上用 $P_n(x)$ 近似 $f(x)$, 除了在插值节点 x_i 处 $P_n(x_i) = f(x_i)$ 外, 在其余点处有误差

定义：插值余项

称

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

为插值多项式的**余项**, 表示用 $P_n(x)$ 去近似 $f(x)$ 的截断误差。

在 $[a, b]$ 上用 $P_n(x)$ 近似 $f(x)$ ，除了在插值节点 x_i 处 $P_n(x_i) = f(x_i)$ 外，在其余点处有误差

定义：插值余项

称

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

为插值多项式的余项，表示用 $P_n(x)$ 去近似 $f(x)$ 的截断误差。

一般地， $\max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)|$ 越小，其近似程度越好。

拉格朗日插值

插值多项式的存在性与惟一性

插值多项式的存在性与唯一性

定理

在 $n+1$ 个互异节点 x_i 上满足插值条件

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

的次数不高于 n 次插值多项式 $P_n(x)$ 存在且惟一。

插值多项式的存在性与唯一性

证明

设 $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$,

插值多项式的存在性与唯一性

证明

设 $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 根据插值条件, 系数 a_0, a_1, \cdots, a_n 应满足

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

插值多项式的存在性与唯一性

证明

设 $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 根据插值条件, 系数 a_0, a_1, \cdots, a_n 应满足

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

其中系数行列式为范德蒙行列式

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j)$$

插值多项式的存在性与唯一性

证明

设 $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 根据插值条件, 系数 a_0, a_1, \cdots, a_n 应满足

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

其中系数行列式为范德蒙行列式

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j)$$

由于节点互异, 即 $x_i \neq x_j (i \neq j)$, 故 $V \neq 0$ 。由克莱姆法则知(2)存在唯一解, 亦即插值多项式存在唯一。

拉格朗日插值

线性插值

定义：线性插值

设 $y = f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 两端点的值为 $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, 要求用线性函数 $y = L_1(x) = ax + b$ 近似代替 $f(x)$, 使得

$$L_1(x_0) = f(x_0), \quad L_1(x_1) = f(x_1)$$

称 $L_1(x)$ 为 $f(x)$ 的线性插值函数。

线性插值

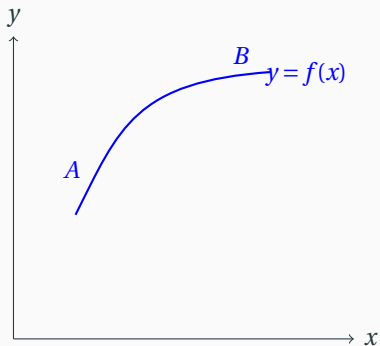


图 2: 线性插值

线性插值的几何意义: 通过两点 $A(x_0, y_0)$ 和 $B(x_1, y_1)$ 的直线近似代替曲线 $y = f(x)$

线性插值

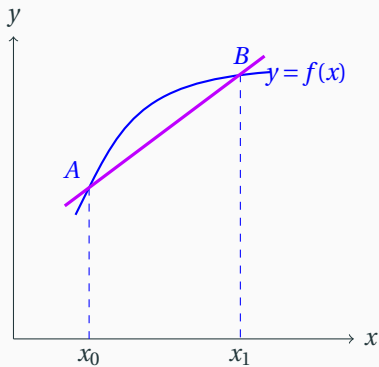


图 2: 线性插值

线性插值的几何意义: 通过两点 $A(x_0, y_0)$ 和 $B(x_1, y_1)$ 的直线近似代替曲线 $y = f(x)$

由直线方程的两点式可求得 $L_1(x)$ 的表达式为

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

线性插值

设

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

则它们均为 x 的一次函数，且具有如下性质

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

具有这种性质的函数 $l_0(x), l_1(x)$ 称为**线性插值基函数**，则

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

定理

条件:

- 1 $f'(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上连续
- 2 $f''(x)$ 在 (x_0, x_1) 内存在
- 3 L_1 是满足线性插值条件的插值多项式

结论

- $\forall x \in [x_0, x_1]$, 则

$$R_1(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

其中 $\xi \in (x_0, x_1)$, 且依赖于 x

证明

- 1 $x = x_0$ 或 $x = x_1$: 结论显然成立
- 2 $x \neq x_0$ 且 $x \neq x_1$: 构造辅助函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_1(t) - \frac{f(x) - L_1(x)}{(x - x_0)(x - x_1)}(t - x_0)(t - x_1)$$

易证 $\varphi(x) = \varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$, 即 $\varphi(t)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上有三个零点。由罗尔定理, $\varphi'(t)$ 在 (x_0, x_1) 内至少有两个零点。对 $\varphi'(t)$ 再应用罗尔定理, 则 $\varphi''(t)$ 在 (x_0, x_1) 内至少有一个零点 ξ , 使得

$$\begin{aligned}\varphi''(\xi) &= f''(\xi) - 2! \frac{f(x) - L_1(x)}{(x - x_0)(x - x_1)} = 0 \\ \Rightarrow R_1(x) &= f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)(x - x_1), \quad \xi_0 \in (x_0, x_1)\end{aligned}$$

- 1 若 $f(x)$ 的表达式未知, 或 $f''(x)$ 在 (x_0, x_1) 内不存在, 就不能用该余项表达式去估计截断误差
- 2 即使 $f''(x)$ 存在, 由于 ξ 的确切位置未知, 此时若能求出 $\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| = M_1$, 则截断误差为

$$|R_1| \leq \frac{M_1}{2!} |(x - x_0)(x - x_1)|.$$

拉格朗日插值

抛物线插值

抛物线插值

对于 $f(x)$, 设

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2,$$

要求作一个二次插值多项式, 使其满足插值条件

$$L_2(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2).$$

由于过不同在一条直线的三点可作一条抛物线, 故称二次插值多项式 $L_2(x)$ 为 $f(x)$ 的抛物线插值函数。

抛物线插值

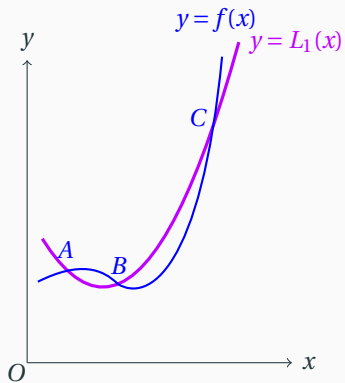


图 3: 抛物线插值

抛物线插值

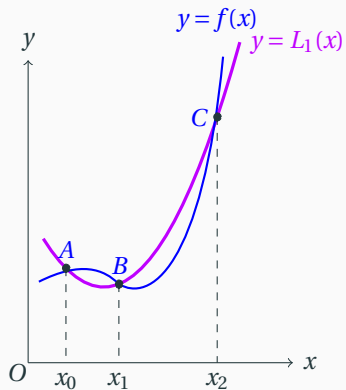


图 3: 抛物线插值

设二次插值多项式为

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x), \quad x_0 \leq x \leq x_2,$$

其中 $l_k(x)$ ($k=0,1,2$) 均为二次多项式, 且满足

$$l_k(x_i) = \delta_{k,i} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, 2)$$

求 $l_0(x)$

由 $l_0(x_1) = l_0(x_2) = 0$ 知 x_1, x_2 为 $l_0(x)$ 的两个零点, 故可设

$$l_0(x) = k(x - x_1)(x - x_2)$$

再由

$$l_0(x_0) = 1$$

知

$$k(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

故

$$l_0(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

求 $l_1(x)$

由 $l_1(x_0) = l_1(x_2) = 0$ 知 x_0, x_2 为 $l_1(x)$ 的两个零点, 故可设

$$l_1(x) = k(x - x_0)(x - x_2)$$

再由

$$l_1(x_1) = 1$$

知

$$k(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

故

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

求 $l_2(x)$

由 $l_2(x_0) = l_2(x_1) = 0$ 知 x_0, x_1 为 $l_2(x)$ 的两个零点, 故可设

$$l_2(x) = k(x - x_0)(x - x_1)$$

再由

$$l_2(x_2) = 1$$

知

$$k(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

故

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$f(x)$ 的二次 Lagrange 插值多项式

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

定理

条件:

- 1 $f''(x)$ 在 $[x_0, x_2]$ 上连续
- 2 $f'''(x)$ 在 (x_0, x_2) 内存在
- 3 L_2 是满足线性插值条件的插值多项式

结论

- $R_2(x) = f(x) - L_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \quad \forall x \in [x_0, x_2]$
其中 $\xi \in (x_0, x_2)$, 且依赖于 x

定理

条件:

- 1 $f''(x)$ 在 $[x_0, x_2]$ 上连续
- 2 $f'''(x)$ 在 (x_0, x_2) 内存在
- 3 L_2 是满足线性插值条件的插值多项式

结论

- $R_2(x) = f(x) - L_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \quad \forall x \in [x_0, x_2]$
其中 $\xi \in (x_0, x_2)$, 且依赖于 x

若 $\max_{a \leq x \leq b} |f'''(x)| = M_2$, 则截断误差限为

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_2}{3!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

拉格朗日插值

拉格朗日插值多项式

拉格朗日插值多项式

设 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 处的函数值 $f(x_k) = y_k$ ($k=0, \cdots, n$)。

现要作一个 n 次插值多项式 $L_n(x)$, 使其满足插值条件

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, 2, \cdots, n).$$

拉格朗日插值多项式

设 n 次插值多项式为

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x), \quad x_0 \leq x \leq x_n,$$

其中 $l_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 均为 n 次多项式, 且满足

$$l_k(x_i) = \delta_{k,i} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \dots, n)$$

拉格朗日插值多项式

求 $l_i(x)$

由

$$l_i(x_0) = \cdots = l_i(x_{i-1}) = l_i(x_{i+1}) = \cdots = l_i(x_n) = 0$$

知 $x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ 为 $l_i(x)$ 的 n 个零点, 故可设

$$l_i(x) = k(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)$$

再由 $l_i(x_i) = 1$ 知

$$k(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n) = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)}$$

故

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)}$$

$f(x)$ 的 n 次 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

其中

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

拉格朗日插值多项式

记

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

则

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$$

于是

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x)}$$

n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是次数为 n 的多项式，特殊情况下次数可能小于 n 。

拉格朗日插值多项式

n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是次数为 n 的多项式，特殊情况下次数可能小于 n 。

如，通过三点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的二次插值多项式 $L_2(x)$ ，若三点共线，则 $y = L_2(x)$ 就是一条直线，而非抛物线。

定理

条件:

- 1 $f^{(n)}(x)$ 在 $[x_0, x_n]$ 上连续
- 2 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (x_0, x_n) 内存在
- 3 L_n 是满足线性插值条件的插值多项式

结论

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \text{ 其中 } \xi \in (x_0, x_n), \text{ 且依赖于 } x$$

定理

通过 $n+1$ 个互异节点 x_0, x_1, \dots, x_n 且满足插值条件的插值多项式是唯一的。

定理

通过 $n+1$ 个互异节点 x_0, x_1, \dots, x_n 且满足插值条件的插值多项式是唯一的。

证明

若还有一个插值多项式 $P_n(x)$, 则 $L_n(x) - P_n(x)$ 是一个次数不超过 n 的多项式, 且在节点 x_i 处的值为 0, 即 $L_n(x) - P_n(x)$ 有 $n+1$ 个零点。但次数不超过 n 的多项式的零点个数不能超过 n , 故只有 $L_n(x) - P_n(x) \equiv 0$, 即 $L_n(x) \equiv P_n(x)$ 。

拉格朗日插值多项式

关于编程，通常采用紧凑表达式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \right] y_k$$

涉及二重循环，先固定 k ，令 i 从 0 到 $n(i \neq k)$ 做乘积，再对 k 求和。

例

已知 e^{-x} 在 $x=1,2,3$ 点的值由下表给出。试分别用线性插值与二次插值计算 $e^{-2.1}$ 的近似值，并进行误差估计。

x	1	2	3
e^{-x}	0.367879441	0.135335283	0.049787068

解

线性插值：取 $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x = 2.1$, 代入一次插值公式

$$L_1(2.1) = 0.135335283 \times \frac{2.1-3}{2-3} + 0.049787068 \times \frac{2.1-2}{3-2} = 0.12678046$$

二次插值：取 $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x = 2.1$, 代入二次插值公式

$$\begin{aligned} L_2(2.1) &= 0.367879441 \times \frac{(2.1-2)(2.1-3)}{(1-2)(1-3)} + 0.135335283 \times \frac{(2.1-1)(2.1-3)}{(2-1)(2-3)} \\ &\quad + 0.049787068 \times \frac{(2.1-1)(2.1-2)}{(3-1)(3-2)} = 0.120165644 \end{aligned}$$

解 (续) :

注意到 e^{-x} 的递减性, 有

$$|R_1(2.1)| \leq \frac{e^{-2}}{2!} |(2.1-2)(2.1-3)| \approx 0.00609009$$

$$|R_2(2.1)| \leq \frac{e^{-1}}{3!} |(2.1-1)(2.1-2)(2.1-3)| \approx 0.006070091$$

分段低次插值

对于函数 $f(x)$ ，并非插值多项式的次数越高，精度就越好。这是因为高次插值多项式往往有数值不稳定的缺点，即对任意的插值节点，

$$P_n(x) \not\rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty$$

分段低次插值

给定 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 在 $[-5, 5]$ 上的各阶导数均存在, 在 $n+1$ 个均匀节点 $x_i = -5 + i\frac{10}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 上所构造的拉格朗日插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+x_k^2} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

分段低次插值

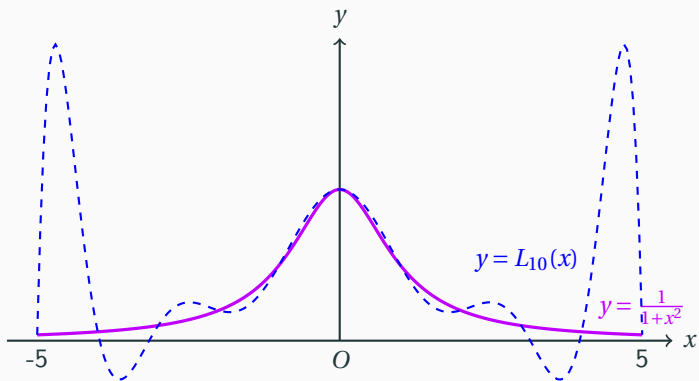


图 4: 龙格现象

分段低次插值

为了避免高次插值的不稳定性，常采用分段插值的方法，即将插值区间分为若干个小区间，在每个小区间上运用前面介绍的插值方法构造低次插值多项式，以达到适当缩小插值区间长度，同样可以提高插值精度的目的。

分段低次插值

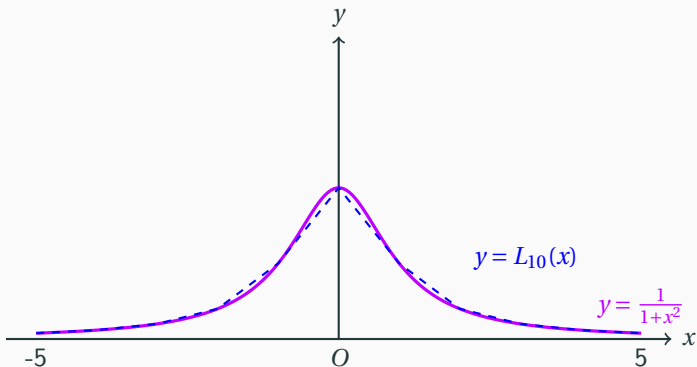


图 5: 将 $f = \frac{1}{1+x^2}$ 在节点 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ 处用折线连起来

分段低次插值的优点：

- 公式简单，计算量小
- 有较好的收敛速度
- 可避免计算机上做高次乘幂时常遇到的上溢和下溢的困难

分段低次插值

分段低次插值

分段低次插值

设

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

且

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

于是得到 $n+1$ 个点

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n).$$

连接相邻两点 (x_i, y_i) 和 (x_{i+1}, y_{i+1}) , 得一折线函数 $\varphi(x)$, 满足

- 1 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续
- 2 $\varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$
- 3 $\varphi(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性函数

则称 $\varphi(x)$ 为分段线性插值函数。

$\varphi(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上可表示为

$$\varphi(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

分段低次插值

$\varphi(x)$ 的基函数表示

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \quad a \leq x \leq b,$$

其中 $l_i(x)$ 是分段的线性连续函数，且满足

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

分段低次插值

$\varphi(x)$ 的基函数表示

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \quad a \leq x \leq b,$$

其中 $l_i(x)$ 是分段的线性连续函数, 且满足

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i (i=0 \text{略去}) \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} (i=n \text{略去}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分段低次插值

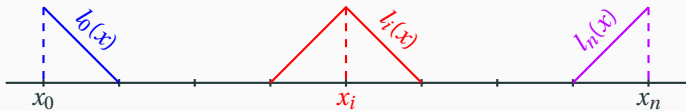


图 6: 分段线性插值基函数

分段低次插值

分段抛物线插值

分段抛物线插值

分段抛物线插值是把区间 $[a, b]$ 分成若干个子区间, 在每个子区间

$$[x_{i-1}, x_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

上用抛物线去近似曲线 $y = f(x)$ 。

分段抛物线插值

$\varphi(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 上可表示为

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i \\ & + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1}, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad (i=1, 2, \dots, n-1).\end{aligned}$$

分段抛物线插值

称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的分段二次插值函数，有如下性质

- 1 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续
- 2 $\varphi(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$)
- 3 $\varphi(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是次数不超过二次的多项式

差商与牛顿插值多项式

拉格朗日插值的优缺点

优点

- 含义直观，形式对称，结构紧凑，便于记忆和编程

缺点

- 当精度不高而需要增加插值节点时，插值多项式须重新构造

为了克服这一缺点，将介绍**牛顿插值多项式**：

其使用比较灵活，当增加插值节点时，只要在原来的基础上增加部分计算而使原来的结果仍可利用。

差商与牛顿插值多项式

差商的定义及性质

差商的定义及性质

定义

已知 $f(x)$ 在互异节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 处的函数值分别为 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$

1 称 $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_{i+1} 的一阶差商。

2 称 $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 的二阶差商。

3 称 $f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$ 为 $f(x)$ 关于节点 $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}$ 的 k 阶差商。

4 当 $k=0$ 时, $f(x_i)$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i 的零阶差商, 记为 $f[x_i]$ 。

差商的定义及性质

$$f'(x_i) = \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} f[x_i, x_{i+1}]$$

故差商是微商的离散形式。

差商的定义及性质

$$f'(x_i) = \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} f[x_i, x_{i+1}]$$

故差商是微商的离散形式。

以下介绍差商的性质。

差商的定义及性质

性质：1

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

性质：2

商与其所含节点的排列次序无关，即

$$f[x_i, x_{i+1}] = f[x_{i+1}, x_i]$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = f[x_{i+1}, x_i, x_{i+2}] = f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$$

性质 : 3

$f(x)$ 在包含互异节点 x_0, x_1, \dots, x_n 的闭区间 $[a, b]$ 上有 n 阶导数, 则

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (a, b).$$

差商的定义及性质

表 1: 差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

差商与牛顿插值多项式

牛顿插值多项式及其余项

牛顿插值多项式及其余项

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \\ f[x, x_0] &= f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1) \end{aligned} \right\}$$
$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)}_{N_1(x)} + \underbrace{f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)}_{R_1^*(x)}$$

易验证 $N_1(x)$ 为满足插值条件

$$N_1(x_0) = y_0, \quad N_1(x_1) = y_1$$

的一次插值多项式。

牛顿插值多项式及其余项

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x, x_0, x_1](x-x_0)(x-x_1) \\ f[x, x_0, x_1] &= f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x-x_2) \end{aligned} \right\}$$
$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)}_{N_2(x)} + \underbrace{f[x, x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{R_2^*(x)}$$

可验证 $N_2(x)$ 为满足插值条件

$$N_2(x_0) = y_0, \quad N_2(x_1) = y_1, \quad N_2(x_2) = y_2$$

的二次插值多项式。

牛顿插值多项式及其余项

类似地, 可得

$$f(x) = N_n(x) + R_n^*(x)$$

其中

$$\begin{aligned} N_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$R_n^*(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

牛顿插值多项式及其余项

类似地, 可得

$$f(x) = N_n(x) + R_n^*(x)$$

其中

$$\begin{aligned} N_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$R_n^*(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

由 $R_n^*(x_i) = 0$ 可知, $N_n(x)$ 为满足插值条件 $N_n(x_i) = y_i$ 的 n 次插值多项式。称 $N_n(x)$ 为 n 次牛顿插值多项式, $R_n^*(x)$ 为牛顿型插值余项。

牛顿插值多项式及其余项

由于满足插值条件的插值多项式存在且惟一，故

$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$

进而当 $f(x)$ 在 (a, b) 上有 $n+1$ 阶导数时，有

$$R_n^*(x) \equiv R_n(x)$$

即

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad \xi \in (a, b).$$

亦即证明了差商的性质 3

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (a, b).$$

牛顿插值多项式及其余项

$N_{k+1}(x)$ 与 $N_k(x)$ 之间的关系为

$$N_{k+1}(x) = N_k(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$$

由此可知，增加一个新节点 x_{k+1} ，只要在 $N_k(x)$ 的基础上，增加计算

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k).$$

例

已知一组观察数据为

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
y_i	0	-5	-6	3

试用此组数据构造 3 次牛顿插值多项式 $N_3(x)$ ，并计算 $N_3(1.5)$ 的值

牛顿插值多项式及其余项

解

差商表为

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	0			
2	-5	-5		
3	-6	-1	2	
4	3	9	5	1

故

$$N_3(x) = 0 - 5(x-1) + 2(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3$$

$$N_3(1.5) = -2.65$$

差分与等距节点插值

上节讨论了任意节点的插值公式，但实际应用中，常采用等距节点。此时，插值公式可进一步简化，差商可用差分代替。

差分与等距节点插值

差分的定义及性质

定义

设 $y = f(x)$ 在等距节点 $x_i = x_0 + ih (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 上的值 $y_i = f(x_i)$ 已知, $h = x_i - x_{i-1}$ 为常数, 称为**步长**, 记

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1},$$

分别称为 $y = f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的**向前差分**和**向后差分**。

差分的定义及性质

类似地，可定义二阶差分：

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_{i+1} - y_i) = \nabla y_{i+1} - \nabla y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

一般地， n 阶差分可定义为 $n-1$ 阶差分的差分

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

$$\nabla^n y_i = \nabla^{n-1} y_i - \nabla^{n-1} y_{i-1}$$

性质：差分与函数值之间的关系

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} + \cdots + (-1)^k C_n^k y_{n+i-k} + \cdots + (-1)^n y_n$$

差分的定义及性质

性质：差分与函数值之间的关系

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} + \cdots + (-1)^k C_n^k y_{n+i-k} + \cdots + (-1)^n y_n$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^4 y_i = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i$$

性质：差分与差商之间的关系

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{\nabla^k y_n}{k! h^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

性质：差分与导数之间的关系

$$\Delta^n y_0 = h^n f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

差分的定义及性质

表 2: 差分表

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				