

数值计算方法

非线性方程的数值解法

张晓平

2019 年 11 月 4 日

武汉大学数学与统计学院

Table of contents

1. 二分法
2. 不动点迭代法
3. 牛顿迭代法
4. 弦截法

例

求代数方程

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

及超越方程

$$e^{-x} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

的解。

例

求代数方程

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

及超越方程

$$e^{-x} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

的解。

定理

高于 4 次的代数方程无精确的求根公式。

二分法

二分法

用数值方法求方程的根，必须知道方程的根所在的区间。

定义：隔根区间

对方程 $f(x) = 0$ ，若在区间 $[a, b]$ 内有且只有一个根，则称 $[a, b]$ 为它的一个**隔根区间**。

二分法的基本思想

通过计算隔根区间的中点，逐步将隔根区间缩小，从而可得方程的近似根数列 $\{x_n\}$ 。

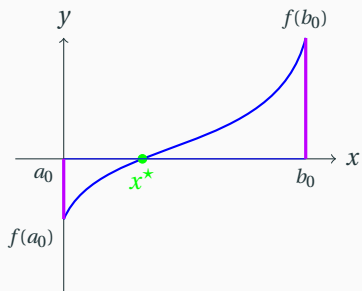
二分法

二分法的基本思想

通过计算隔根区间的中点，逐步将隔根区间缩小，从而可得方程的近似根数列 $\{x_n\}$ 。

设 $f(x) = 0$ 的隔根区间是 $[a, b]$ ，且 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ 。

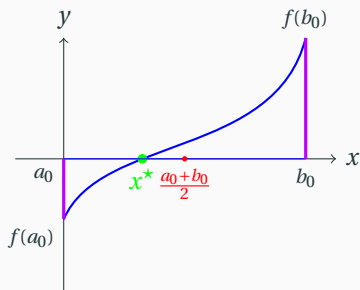
二分法



(1) 计算 $f(\frac{a_0+b_0}{2})$:

- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

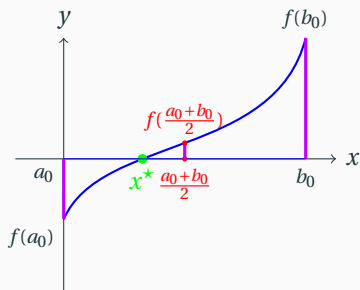
二分法



(1) 计算 $f(\frac{a_0+b_0}{2})$:

- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

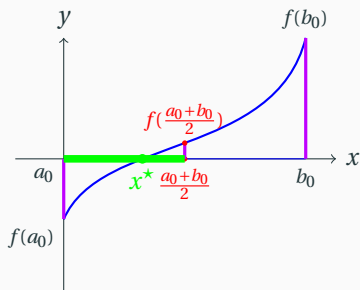
二分法



(1) 计算 $f(\frac{a_0+b_0}{2})$:

- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

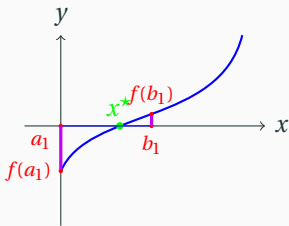
二分法



(1) 计算 $f(\frac{a_0+b_0}{2})$:

- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

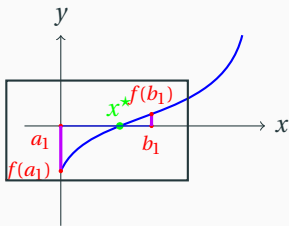
二分法



(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$ ，计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$ ：

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

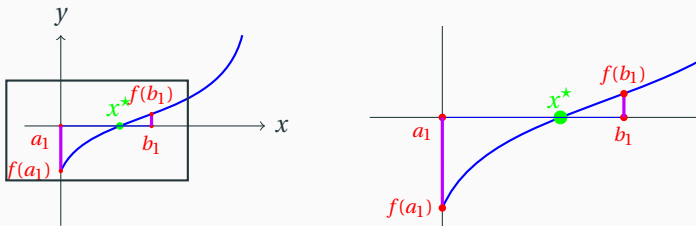
二分法



(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$, 计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

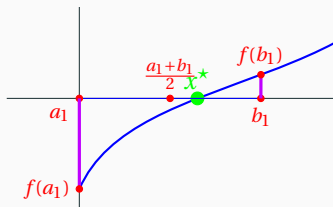
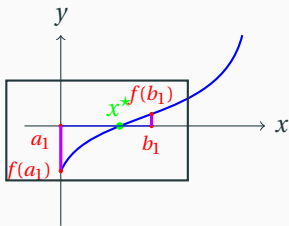
二分法



(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$, 计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

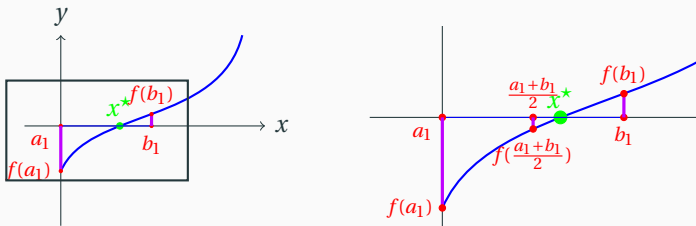
二分法



(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$, 计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

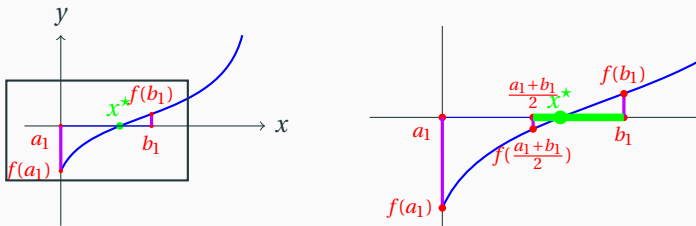
二分法



(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$, 计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

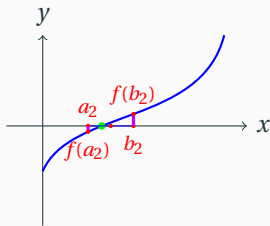
二分法



(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$, 计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

二分法



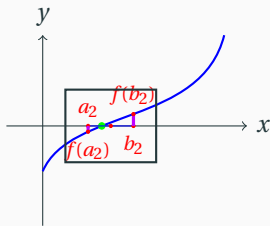
(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$ ，计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$ ：

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

二分法



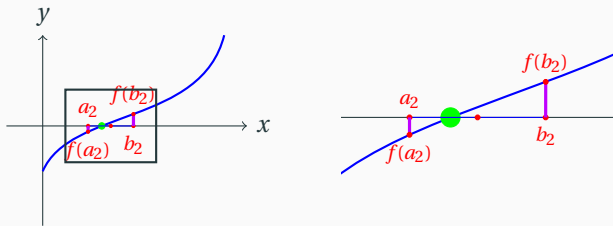
(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$ ，计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$ ：

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

二分法



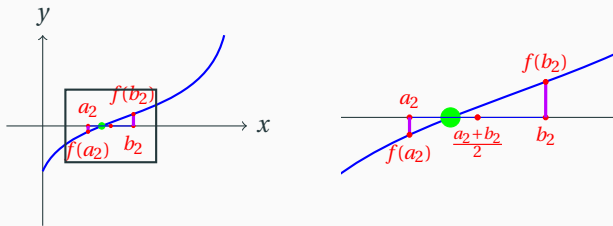
(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$, 计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

二分法



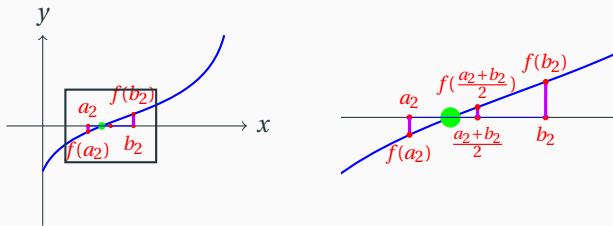
(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$, 计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

二分法



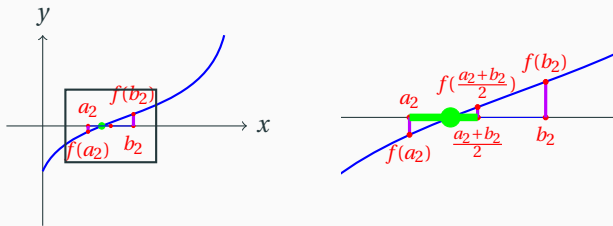
(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$, 计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

二分法



(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$, 计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \Rightarrow$ 隔根区间为 $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

二分法

重复上述过程，可得到一系列的隔根区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

并有 $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$, $x^* \in (a_k, b_k)$, 且后一区间的长度都是前一区间长度的一半, 即

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b - a}{2^k}$$

二分法

重复上述过程，可得到一系列的隔根区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

并有 $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$, $x^* \in (a_k, b_k)$, 且后一区间的长度都是前一区间长度的一半，即

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b - a}{2^k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

二分法

重复上述过程，可得到一系列的隔根区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

并有 $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$, $x^* \in (a_k, b_k)$, 且后一区间的长度都是前一区间长度的一半, 即

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b - a}{2^k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

即这些区间最终收缩于一点 x^* , 显然 x^* 就是方程 $f(x) = 0$ 的根。

二分法

实际计算时，只要二分的次数 n 足够大，就可取最后区间的中点 $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的近似值，即

$$x^* \approx \frac{a_k + b_k}{2}.$$

二分法

实际计算时，只要二分的次数 n 足够大，就可取最后区间的中点 $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的近似值，即

$$x^* \approx \frac{a_k + b_k}{2}.$$

此时所产生的误差为

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

二分法

实际计算时，只要二分的次数 n 足够大，就可取最后区间的中点 $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的近似值，即

$$x^* \approx \frac{a_k + b_k}{2}.$$

此时所产生的误差为

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

若事先给定的精度要求为 ϵ ，则只需

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}} < \epsilon$$

便可停止计算。

例

用二分法求方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 内的根的近似解, 要求绝对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$

例

用二分法求方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 内的根的近似解, 要求绝对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$

解

在 $[1, 2]$ 上,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x > 0,$$

故 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上严格单调增加, 且 $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, 所以方程在 $[1, 2]$ 内有惟一实根。

例

用二分法求方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 内的根的近似解, 要求绝对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$

解

在 $[1, 2]$ 上,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x > 0,$$

故 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上严格单调增加, 且 $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, 所以方程在 $[1, 2]$ 内有惟一实根。令 $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$, 则得

$$k+1 \geq \frac{\ln 200}{\ln 2},$$

所以至少对分 7 次。

表 1: 计算结果

k	x_k	$f(x_k)$ 符号	隔根区间
1	$x_1 = 1.5$	+	[1, 1.5]
2	$x_2 = 1.25$	-	[1.25, 1.5]
3	$x_3 = 1.375$	+	[1.25, 1.375]
4	$x_4 = 1.3125$	-	[1.3125, 1.375]
5	$x_5 = 1.34375$	-	[1.34375, 1.375]
6	$x_6 = 1.359375$	-	[1.359375, 1.375]
7	$x_7 = 1.3671875$	+	[1.359375, 1.3671875]

计算步骤

(1) 准备

输入 a, b, ϵ , 计算 $f(a)$

(2) 循环

$$\text{计算 } x = \frac{a+b}{2}$$

若 $f(a) \cdot f(x) < 0$, 则 $x \rightarrow b$; 否则 $x \rightarrow a$

(3) 控制

若 $|b-a| < \epsilon$, 则终止循环, x 即为所求的根; 否则转(2)继续循环;

二分法

优点

- 运算简单，方法可靠，易于在计算机上实现
- 对函数 $f(x)$ 的要求不高，只要求 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续

二分法

优点

- 运算简单，方法可靠，易于在计算机上实现
- 对函数 $f(x)$ 的要求不高，只要求 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续

缺点

- 不能用于求复根及偶数重根
- 收敛速度较慢（因为每步误差是以 $1/2$ 因子下降）

二分法

优点

- 运算简单，方法可靠，易于在计算机上实现
- 对函数 $f(x)$ 的要求不高，只要求 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续

缺点

- 不能用于求复根及偶数重根
- 收敛速度较慢（因为每步误差是以 $1/2$ 因子下降）

用途

常用该方法为其他求根方法提供较好的初始值，再用其他的求根方法精确化。

不动点迭代法

不动点迭代法

给定方程

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上连续, 并设 x_0 是方程的一个近似根。

不动点迭代法

给定方程

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上连续, 并设 x_0 是方程的一个近似根。

将 (1) 改写成等价形式

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

不动点迭代法

给定方程

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上连续, 并设 x_0 是方程的一个近似根。

将 (1) 改写成等价形式

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

为了求得 (1) 的根, 可由 (2) 构造迭代序列

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi(x_0), \\ x_2 = \varphi(x_1), \\ \vdots \\ x_{k+1} = \varphi(x_k), \\ \vdots \end{array} \right.$$

不动点迭代法

给定方程

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上连续, 并设 x_0 是方程的一个近似根。

将 (1) 改写成等价形式

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

为了求得 (1) 的根, 可由 (2) 构造迭代序列

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_0), \\ x_2 = \varphi(x_1), \\ \vdots \\ x_{k+1} = \varphi(x_k), \\ \vdots \end{cases}$$

该方法成为**迭代法**, $\varphi(x)$ 称为**迭代函数**。

若由迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 的极限存在，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*,$$

则称**迭代法收敛**，否则称**迭代法发散**。

不动点迭代法

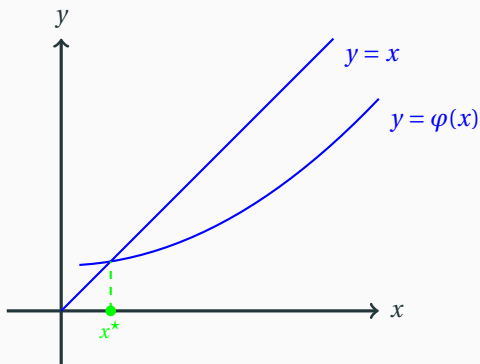


图 1: 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^*) < 1$

不动点迭代法

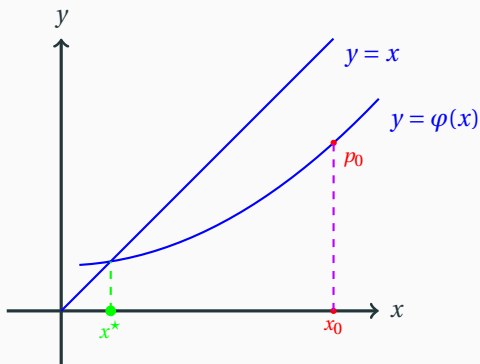


图 1: 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^*) < 1$

不动点迭代法

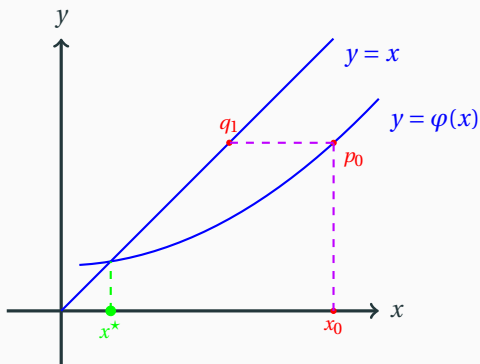


图 1: 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^*) < 1$

不动点迭代法

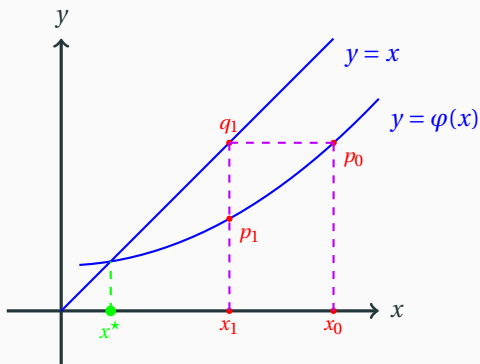


图 1: 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^*) < 1$

不动点迭代法

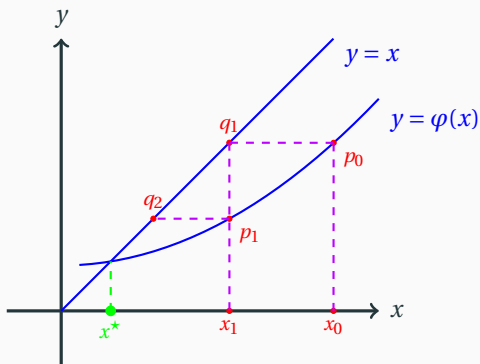


图 1: 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^*) < 1$

不动点迭代法

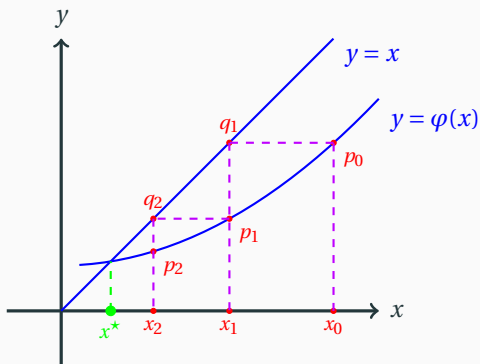


图 1: 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^*) < 1$

不动点迭代法

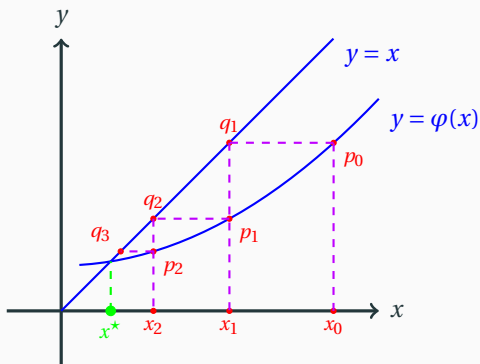


图 1: 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^*) < 1$

不动点迭代法

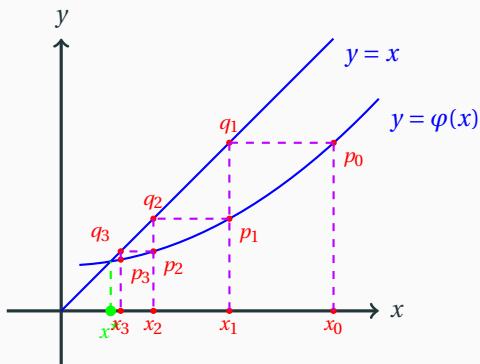


图 1: 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^*) < 1$

不动点迭代法

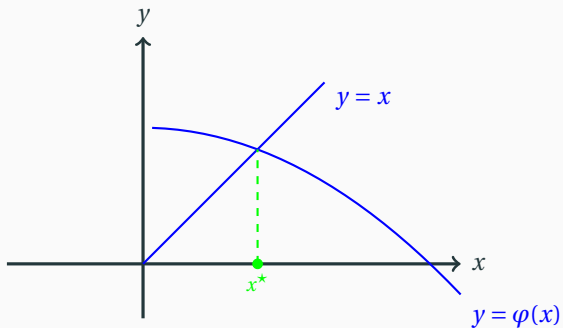


图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^*) < 0$

不动点迭代法

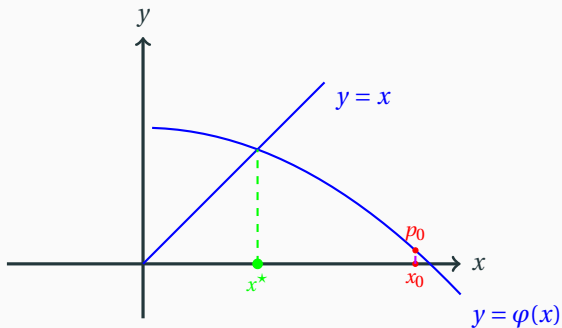


图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^*) < 0$

不动点迭代法

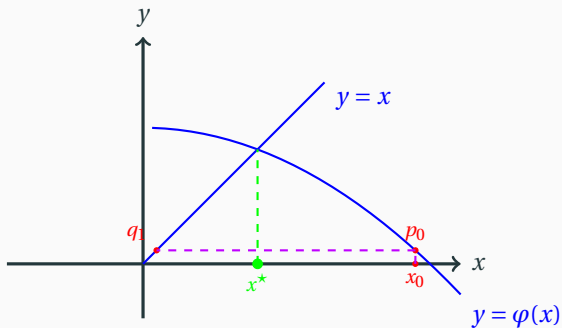


图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^*) < 0$

不动点迭代法

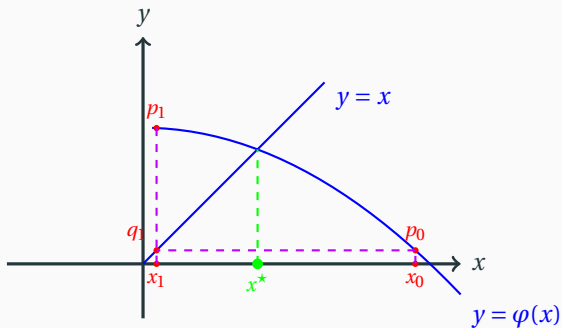


图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^*) < 0$

不动点迭代法

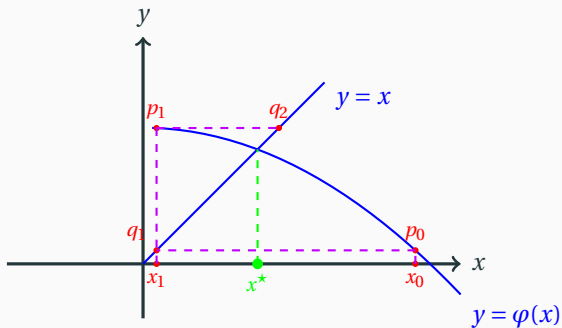


图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^*) < 0$

不动点迭代法

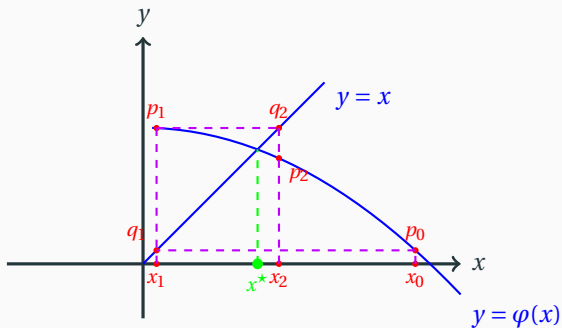


图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^*) < 0$

不动点迭代法

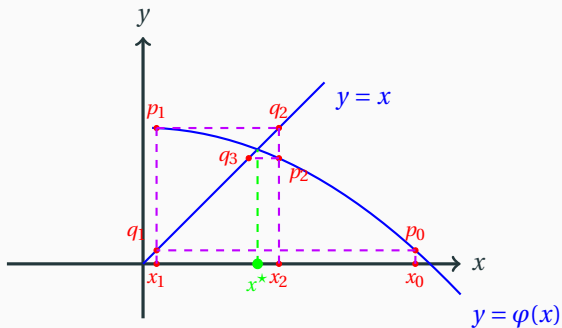


图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^*) < 0$

不动点迭代法

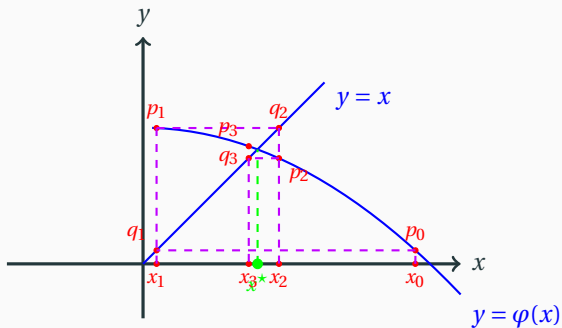


图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^*) < 0$

不动点迭代法

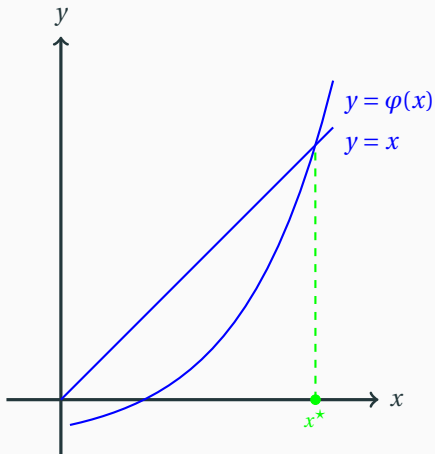


图 3: 几何解释 (3): $\varphi'(x^*) > 1$

不动点迭代法

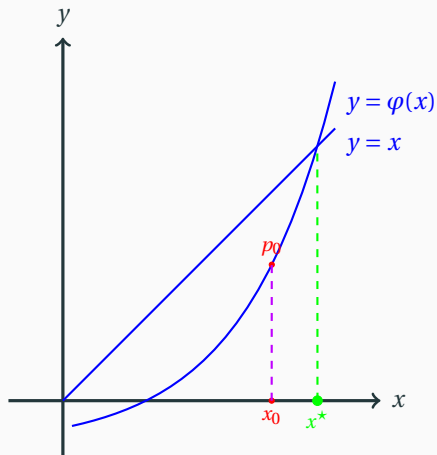


图 3: 几何解释 (3): $\varphi'(x^*) > 1$

不动点迭代法

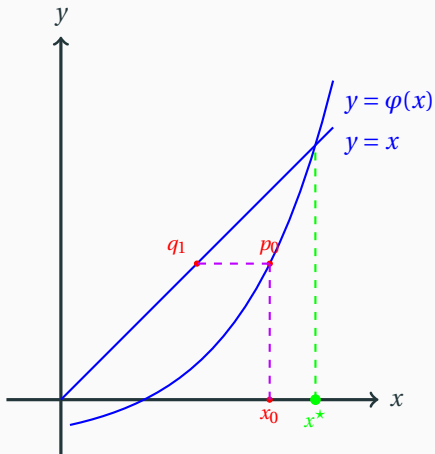


图 3: 几何解释 (3): $\varphi'(x^*) > 1$

不动点迭代法

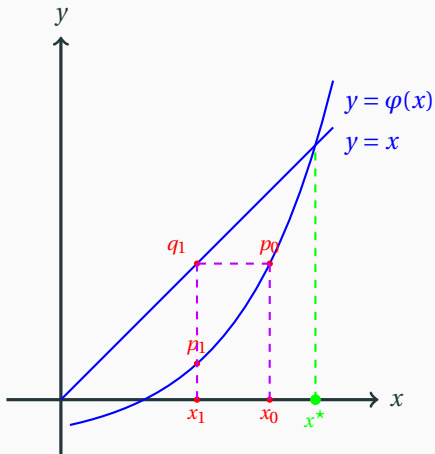


图 3: 几何解释 (3): $\varphi'(x^*) > 1$

不动点迭代法

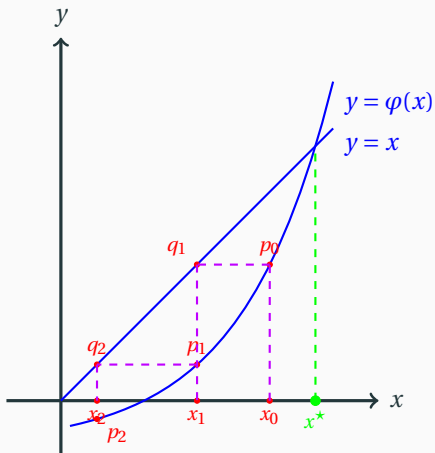


图 3: 几何解释 (3): $\varphi'(x^*) > 1$

不动点迭代法

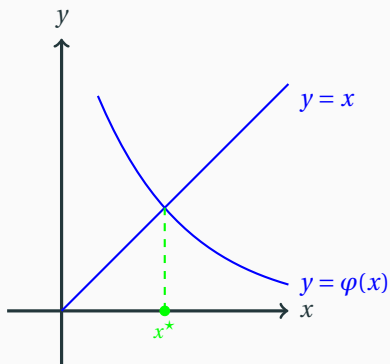


图 4: 几何解释 (4): $\varphi'(x^*) < -1$

不动点迭代法

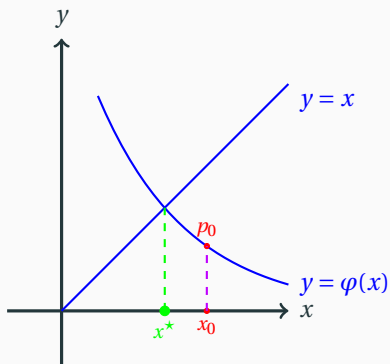


图 4: 几何解释 (4): $\varphi'(x^*) < -1$

不动点迭代法

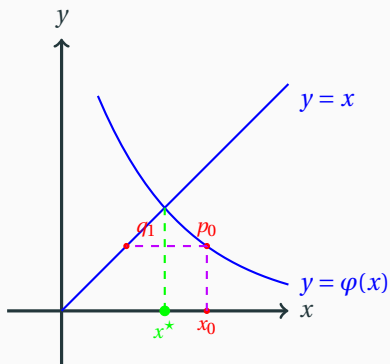


图 4: 几何解释 (4): $\varphi'(x^*) < -1$

不动点迭代法

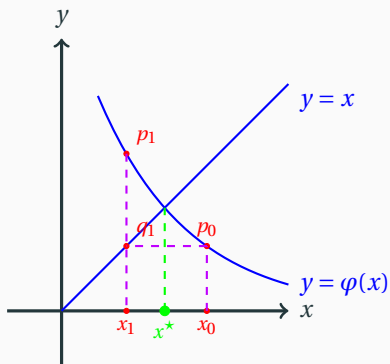


图 4: 几何解释 (4): $\varphi'(x^*) < -1$

不动点迭代法

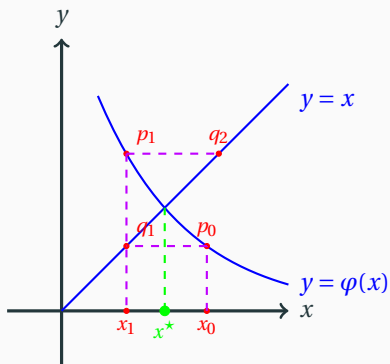


图 4: 几何解释 (4): $\varphi'(x^*) < -1$

不动点迭代法

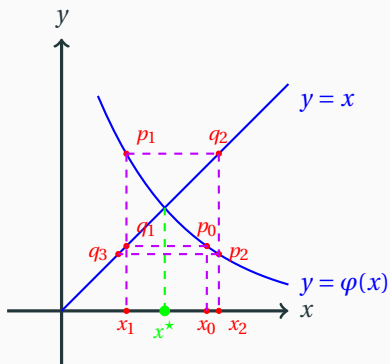


图 4: 几何解释 (4): $\varphi'(x^*) < -1$

不动点迭代法

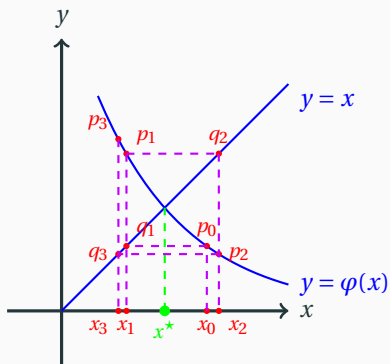


图 4: 几何解释 (4): $\varphi'(x^*) < -1$

由图可看出，

- 当 $\varphi'(x)$ 在 x^* 处满足不同条件时，迭代过程的收敛情况也有所不同。
- 迭代过程的收敛依赖于迭代函数的构造，为使迭代法有效，必须保证其收敛性。

定义：不动点

设 $\varphi(x)$ 为连续函数，则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \implies x^* = \varphi(x^*) \implies x^* \text{ 是 } x = \varphi(x) \text{ 的解,}$$

称 x^* 为迭代函数的不动点，简单迭代法又称为不动点迭代法。

定义：不动点

设 $\varphi(x)$ 为连续函数，则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \implies x^* = \varphi(x^*) \implies x^* \text{ 是 } x = \varphi(x) \text{ 的解,}$$

称 x^* 为迭代函数的不动点，简单迭代法又称为不动点迭代法。

将 $f(x) = 0$ 转化为等价方程 $x = \varphi(x)$ 的方法有多种，且不惟一。如

$$f(x) = x - \sin x - 0.5 = 0 \iff \begin{cases} (1) & x = \varphi_1(x) = \sin x + 0.5 \\ (2) & x = \varphi_2(x) = \arcsin(x - 0.5). \end{cases}$$

不动点迭代法

定义：不动点

设 $\varphi(x)$ 为连续函数，则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \implies x^* = \varphi(x^*) \implies x^* \text{ 是 } x = \varphi(x) \text{ 的解,}$$

称 x^* 为迭代函数的不动点，简单迭代法又称为不动点迭代法。

将 $f(x) = 0$ 转化为等价方程 $x = \varphi(x)$ 的方法有多种，且不惟一。如

$$f(x) = x - \sin x - 0.5 = 0 \iff \begin{cases} (1) & x = \varphi_1(x) = \sin x + 0.5 \\ (2) & x = \varphi_2(x) = \arcsin(x - 0.5). \end{cases}$$

对于不动点迭代法，选择迭代函数非常重要。不同的迭代函数会产生不同的迭代序列，且收敛情况也不一定相同，即使初始值选择相同。

例

已知 $10^x - x - 2 = 0$ 在 $[0.3, 0.4]$ 内有一个根，用两种不同的迭代公式，

$$(1) \quad x_{k+1} = 10^{x_k} - 2$$

$$(2) \quad x_{k+1} = \log(x_k + 2)$$

例

已知 $10^x - x - 2 = 0$ 在 $[0.3, 0.4]$ 内有一个根，用两种不同的迭代公式，

$$(1) \quad x_{k+1} = 10^{x_k} - 2$$

$$(2) \quad x_{k+1} = \log(x_k + 2)$$

表 2: 计算结果

k	迭代格式 (1)	迭代格式 (2)
0	$x_0 = 0.3$	$x_0 = 0.3$
1	$x_1 = -0.0047$	$x_1 = 0.3617$
2	$x_2 = -1.0108$	$x_2 = 0.3732$
3		$x_3 = 0.3753$
4		$x_4 = 0.3757$

由迭代法的几何意义可知，为了保证迭代过程收敛，就要求迭代函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上变化不是很大，即 $\varphi'(x)$ 的绝对值应较小。

不动点迭代法

定理

设有方程 $x = \varphi(x)$, 若

- (1) 当 $x \in [a, b]$ 时, $\varphi(x) \in [a, b]$
- (2) $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且有 $|\varphi'(x)| \leq L < 1, x \in [a, b]$

不动点迭代法

定理

设有方程 $x = \varphi(x)$, 若

- (1) 当 $x \in [a, b]$ 时, $\varphi(x) \in [a, b]$
- (2) $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且有 $|\varphi'(x)| \leq L < 1, x \in [a, b]$

则

- (1) $x = \varphi(x)$ 存在惟一解 x^*
- (2) 对任意初值 $x_0 \in [a, b]$, 迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

产生的数列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的惟一根 x^* , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$

- (3) 误差估计

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|$$

不动点迭代法

利用

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|,$$

可用于

- 估计迭代 k 次时的误差
- 估计达到给定精度要求 ϵ 时，所需迭代的次数 k

不动点迭代法

利用

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|,$$

可用于

- 估计迭代 k 次时的误差
- 估计达到给定精度要求 ϵ 时，所需迭代的次数 k

若欲使 $|x_k - x^*| \leq \epsilon$ ，只要

$$\frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \epsilon$$

不动点迭代法

利用

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|,$$

可用于

- 估计迭代 k 次时的误差
- 估计达到给定精度要求 ϵ 时，所需迭代的次数 k

若欲使 $|x_k - x^*| \leq \epsilon$ ，只要

$$\frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \epsilon \implies k > \frac{\ln \frac{\epsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|}}{\ln L}$$

不动点迭代法

由

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|,$$

可知：

- $0 < L < 1$ 越小， $\{x_k\}$ 收敛越快。
- 只要相邻两次迭代的差 $|x_k - x_{k-1}|$ 足够小，就可保证近似解 x_k 有足够的精度

不动点迭代法

由

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|,$$

可知:

- $0 < L < 1$ 越小, $\{x_k\}$ 收敛越快。
- 只要相邻两次迭代的差 $|x_k - x_{k-1}|$ 足够小, 就可保证近似解 x_k 有足够的精度

实际计算时, 常采用条件

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon$$

来控制迭代终止。

不动点迭代法

定理：局部收敛性

设 x^* 是方程 $x = \varphi(x)$ 的根, $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某一邻域连续, 且 $|\varphi'(x^*)| < 1$, 则存在 x^* 的一个邻域 $S = \{x: |x - x^*| \leq \delta\}$, 使得 $\forall x_0 \in S$, 由迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

产生的数列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的根 x^* 。

证明

取 $[a, b] = [x^* - \delta, x^* + \delta]$, 只需验证前面定理的条件 (1)。

不动点迭代法

定理：局部收敛性

设 x^* 是方程 $x = \varphi(x)$ 的根, $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某一邻域连续, 且 $|\varphi'(x^*)| < 1$, 则存在 x^* 的一个邻域 $S = \{x: |x - x^*| \leq \delta\}$, 使得 $\forall x_0 \in S$, 由迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

产生的数列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的根 x^* 。

证明

取 $[a, b] = [x^* - \delta, x^* + \delta]$, 只需验证前面定理的条件 (1)。设 $x \in S$, 即当 $|x - x^*| \leq \delta$ 时, 由微分中值定理及 $|\varphi'(x)| < 1$, 有

$$|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(x - x^*)| \leq L|x - x^*| < |x - x^*| \leq \delta,$$

故 $\varphi(x) \in S$ 。

例

求 $f(x) = 2x - \log x - 7 = 0$ 的最大根，要求精度为 10^{-4} 。

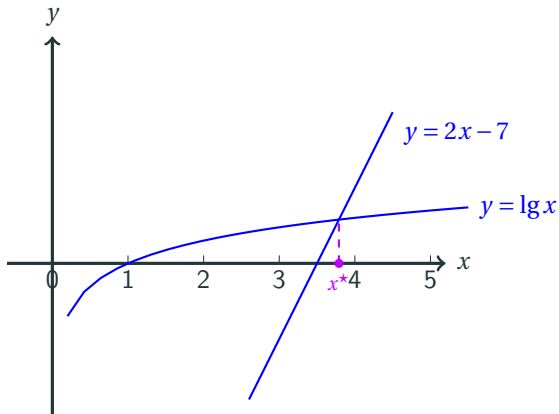
不动点迭代法

解

(1) 等价方程为

$$2x - 7 = \lg x$$

由以下示意图知方程的最大根在 $[3.5, 4]$ 内。



不动点迭代法

解 (续) :

(2) 建立迭代公式, 判别收敛性

将方程等价变形为

$$x = \frac{1}{2}(\log x + 7)$$

迭代公式为

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(\log x_k + 7)$$

不动点迭代法

解 (续) :

(2) 建立迭代公式, 判别收敛性

将方程等价变形为

$$x = \frac{1}{2}(\log x + 7)$$

迭代公式为

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(\log x_k + 7)$$

因 $\varphi'(x) = \frac{1}{2\ln 10} \cdot \frac{1}{x}$, 故 $\varphi(x)$ 在 $[3.5, 4]$ 内可导。因 $\varphi(x)$ 在 $[3.5, 4]$ 内为增函数, 且

$$\varphi(3.5) \approx 3.77, \quad \varphi(4) \approx 3.80$$

故当 $x \in [3.5, 4]$ 时, $\varphi(x) \in [3.5, 4]$ 。因为

$$L = \max |\varphi'(x)| \approx \varphi'(3.5) \approx 0.06 < 1$$

故迭代法收敛。

解 (续) :

(3) 计算

取 $x_0 = 3.5$, 有

$$x_1 = \frac{1}{2}(\log x_0 + 7) \approx 3.78989,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\log x_1 + 7) \approx 3.78931,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\log x_2 + 7) \approx 3.78928.$$

因为 $|x_3 - x_2| \leq 10^{-4}$, 故方程的最大根为

$$x^* \approx x_3 = 3.789.$$

例

用迭代法求 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在隔根区间 $[1.4, 1.5]$ 内的根，要求精确到小数点后第 4 位。

例

用迭代法求 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在隔根区间 $[1.4, 1.5]$ 内的根，要求精确到小数点后第 4 位。

解

(1) 构造迭代公式

方程的等价形式为

$$x = (x^2 + 1)^{1/3} = \varphi(x)$$

迭代公式为

$$x_{k+1} = (x_k^2 + 1)^{1/3}$$

解 (续) :

(2) 判断迭代法的收敛性

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{3(x^2 + 1)^{2/3}}$$

因 $\varphi(x)$ 在区间 $[1.4, 1.5]$ 内可导, 且

$$|\varphi'(x)| \leq 0.5 < 1$$

故迭代法收敛

解 (续) :

(3) 计算结果

k	x_k	$ x_{k+1} - x_k \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$
0	$x_0 = 1.5$	
1	$x_1 = 1.4812480$	$ x_1 - x_0 \approx 0.02$
2	$x_2 = 1.4727057$	$ x_2 - x_1 \approx 0.009$
3	$x_3 = 1.4688173$	$ x_2 - x_1 \approx 0.004$
4	$x_4 = 1.4670480$	$ x_2 - x_1 \approx 0.002$
5	$x_5 = 1.4662430$	$ x_2 - x_1 \approx 0.0009$
6	$x_6 = 1.4658786$	$ x_2 - x_1 \approx 0.0004$
7	$x_7 = 1.4657020$	$ x_2 - x_1 \approx 0.0002$
8	$x_8 = 1.4656344$	$ x_2 - x_1 \approx 0.00007$
9	$x_9 = 1.4656000$	$ x_2 - x_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

不动点迭代法

计算步骤

(1) 准备

选取初值 x_0 ，确定 $f(x) = 0$ 的等价方程 $x = \varphi(x)$ ；

(2) 迭代

依公式

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

迭代一次得新近似值 x_1 ；

(3) 控制

若 $|x_1 - x_0| < \epsilon$ ，则终止迭代， x_1 即为所求的根；否则转(4)；

(4) 准备迭代

若迭代次数超过预先指定的次数 N ，则方法失败；

否则

$$x_1 \rightarrow x_0,$$

转(2)继续迭代。

优点

- 计算程序简单，可计算复根
- 若迭代公式收敛，只要迭代次数足够，可使结果达到指定精度
- L 越接近于零，收敛速度越快

优点

- 计算程序简单，可计算复根
- 若迭代公式收敛，只要迭代次数足够，可使结果达到指定精度
- L 越接近于零，收敛速度越快

缺点

- 需自行选取合适的迭代函数
- L 接近于 1 时，收敛速度越很慢

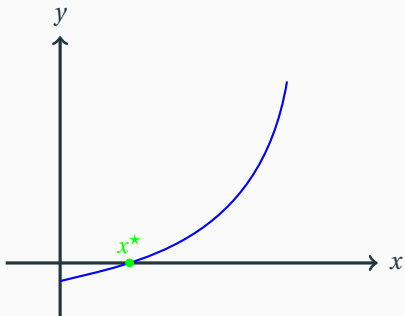
牛顿迭代法

牛顿法的条件

设 x^* 为 $f(x) = 0$ 在隔根区间 $[a, b]$ 内的根,

- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导
- $\forall x \in [a, b]$ 有 $f'(x) \neq 0$ 。

牛顿迭代法



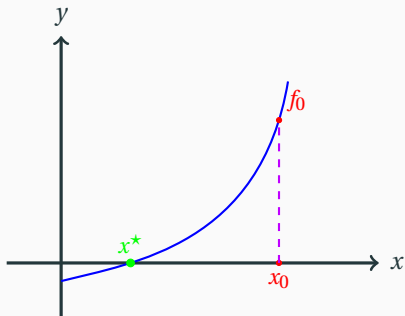
(1) 任取初值 $x_0 \in [a, b]$ ，过点 $(x_0, f(x_0))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

牛顿迭代法



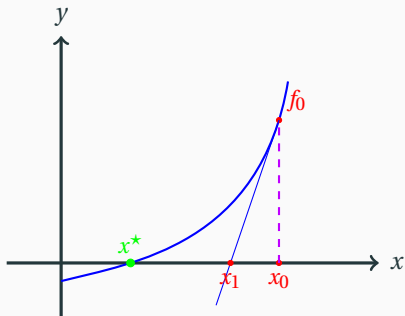
(1) 任取初值 $x_0 \in [a, b]$ ，过点 $(x_0, f(x_0))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

牛顿迭代法



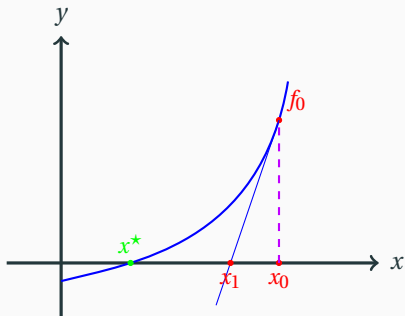
(1) 任取初值 $x_0 \in [a, b]$ ，过点 $(x_0, f(x_0))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

牛顿迭代法



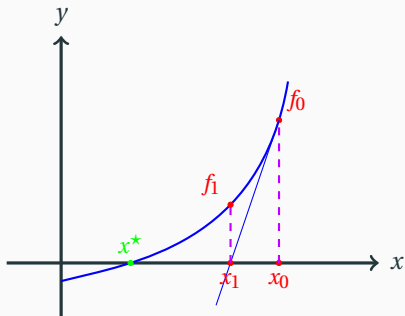
(2) 过点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

牛顿迭代法



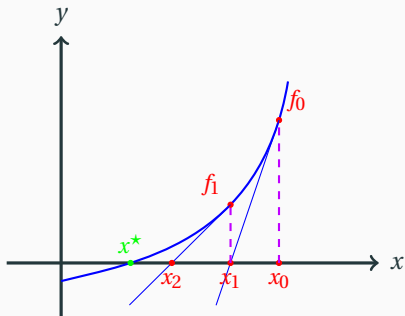
(2) 过点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

牛顿迭代法



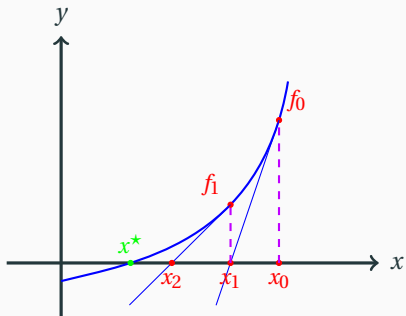
(2) 过点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

牛顿迭代法



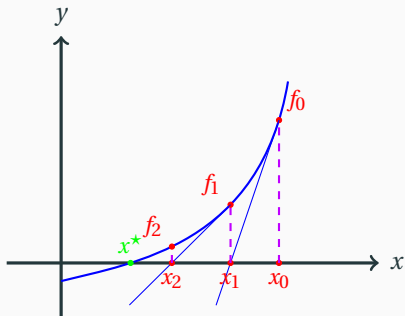
(3) 过点 $(x_2, f(x_2))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

牛顿迭代法



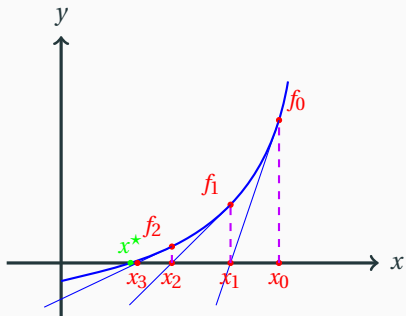
(3) 过点 $(x_2, f(x_2))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

牛顿迭代法



(3) 过点 $(x_2, f(x_2))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

如此下去，第 $n+1$ 条切线为

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

该方法称为**牛顿法**，(2) 为**牛顿迭代公式**。

因为

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

故牛顿迭代法可由等价方程写出，迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

定理：局部收敛性定理

设 x^* 为 $f(x) = 0$ 的根，若

- 1 $f(x)$ 在 x^* 的邻域内有连续的二阶导数
- 2 在 x^* 的邻域内 $f'(x) \neq 0$

则 $\exists S = \{x \mid |x - x^*| \leq \delta\}$, s.t. $\forall x_0 \in S$, 牛顿迭代所产生的数列收敛到 x^* 。

牛顿迭代法

定理：局部收敛性定理

设 x^* 为 $f(x) = 0$ 的根，若

- 1 $f(x)$ 在 x^* 的邻域内有连续的二阶导数
- 2 在 x^* 的邻域内 $f'(x) \neq 0$

则 $\exists S = \{x \mid |x - x^*| \leq \delta\}$, s.t. $\forall x_0 \in S$, 牛顿迭代所产生的数列收敛到 x^* 。

证明

由 $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ 及条件 (1)、(2) 可知, $\varphi(x)$ 在 x^* 的邻域内可导。由 $\varphi'(x^*)$ 及连续函数的性质, 必存在 x^* 的某个邻域 $S = \{x \mid |x - x^*| \leq \delta\}$, s.t. $\forall x \in S$ 有

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1.$$

牛顿法的局部收敛性对初值 x_0 要求较高，即要求初值必须选取得充分接近方程的根才能保证迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x^* 。

牛顿法的局部收敛性对初值 x_0 要求较高，即要求初值必须选取得充分接近方程的根才能保证迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x^* 。

事实上，若 x_0 不是选取得充分接近根 x^* 时，牛顿法则收敛得很慢，甚至会发散。

定理

设 x^* 为 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内的根, 若

- $\forall x \in [a, b], f'(x), f''(x)$ 连续且不变号
- 选取 $x_0 \in [a, b]$, 使 $f(x_0)f''(x_0) > 0$

则牛顿迭代所产生的数列收敛到 x^* 。

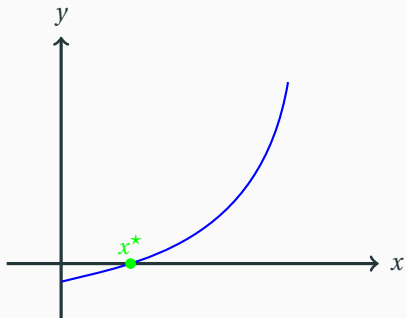


图 5: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

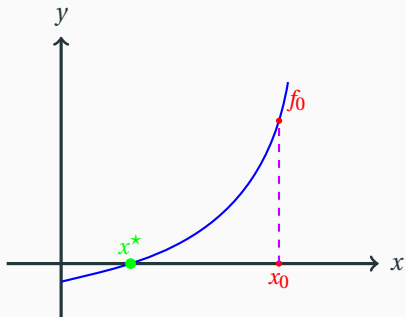


图 5: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

牛顿迭代法

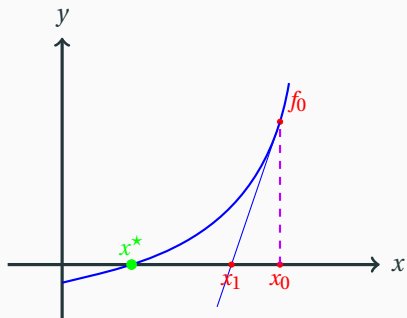


图 5: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

牛顿迭代法

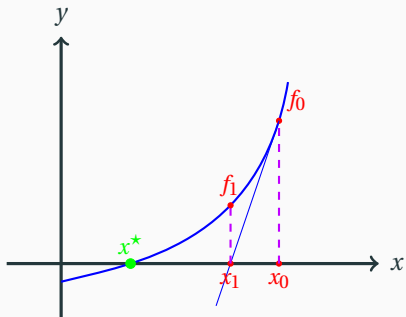


图 5: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

牛顿迭代法

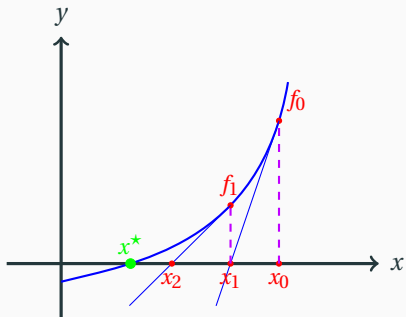


图 5: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

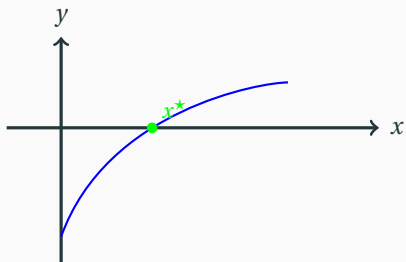


图 6: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

牛顿迭代法

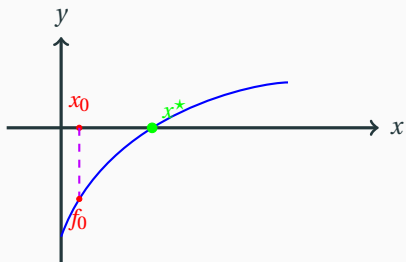


图 6: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

牛顿迭代法

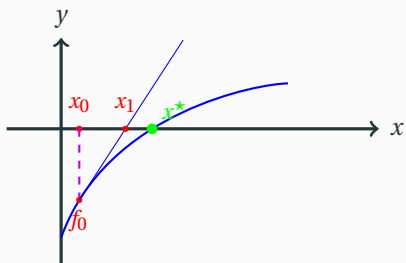


图 6: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

牛顿迭代法

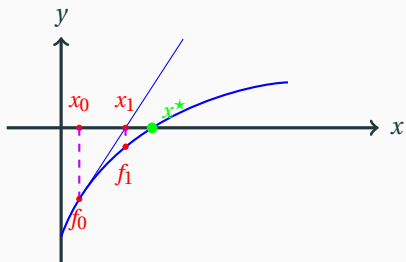


图 6: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

牛顿迭代法

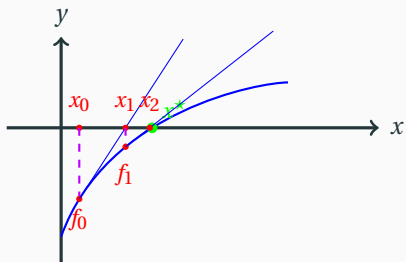


图 6: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

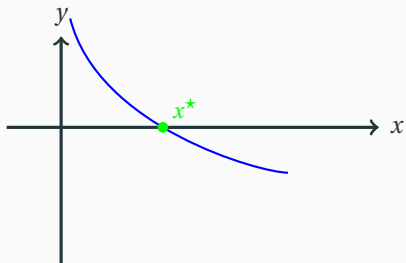


图 7: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

牛顿迭代法

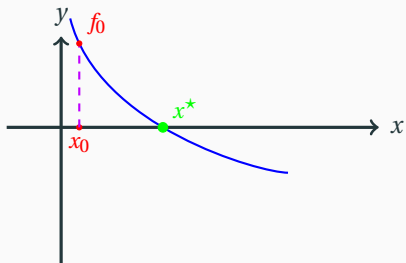


图 7: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

牛顿迭代法

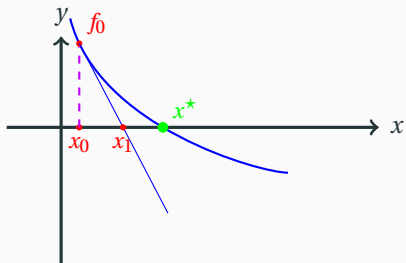


图 7: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

牛顿迭代法

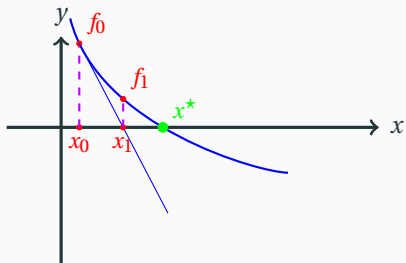


图 7: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

牛顿迭代法

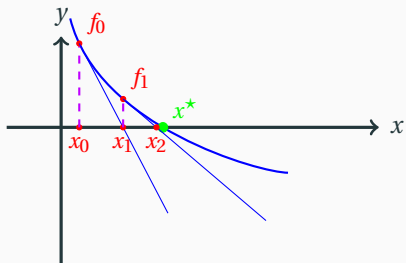


图 7: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $f(x_0) > 0$

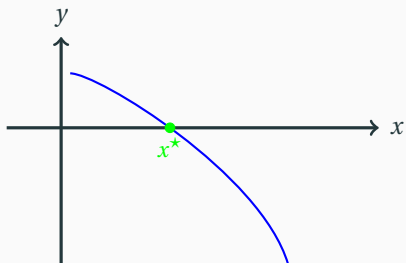


图 8: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

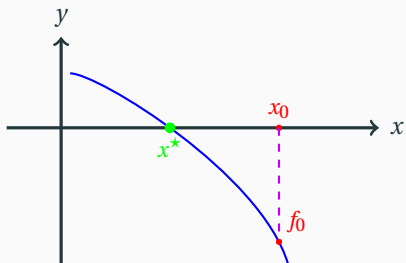


图 8: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

牛顿迭代法

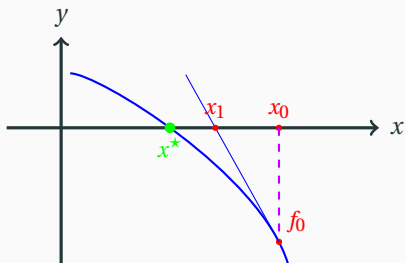


图 8: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

牛顿迭代法

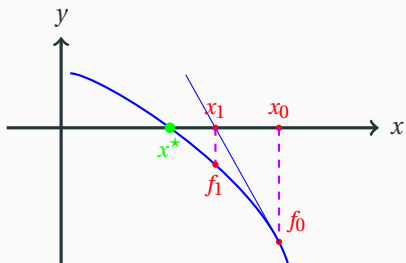


图 8: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

牛顿迭代法

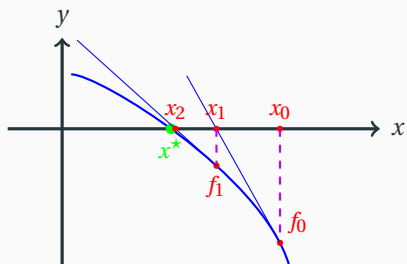


图 8: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, $f(x_0) < 0$

由图可看出，用牛顿法求得的序列 $\{x_n\}$ 都是单调地趋于 x^* ，故牛顿法是收敛的，并且凡满足关系式

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

的 x_0 都可做初值。

使用牛顿法，初始值的选取非常重要。

问题

若 $[a, b]$ 上 $f'(x)$, $f''(x)$ 的符号不容易判别，该如何选取初值？

牛顿迭代法

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow \underbrace{x_1 - x^*}_{e_1} &= \underbrace{(x_0 - x^*)}_{e_0} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow \frac{e_1}{e_0} &= 1 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x_0 - x^*)} = -\frac{f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0)}{f'(x_0)(x^* - x_0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow \underbrace{x_1 - x^*}_{e_1} &= \underbrace{(x_0 - x^*)}_{e_0} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow \frac{e_1}{e_0} &= 1 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x_0 - x^*)} = -\frac{f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0)}{f'(x_0)(x^* - x_0)}\end{aligned}$$

由泰勒展开

$$0 = f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x_0)^2$$

$$0 = f(x^*) = f(x_0) + f'(\eta)(x^* - x_0)$$

可得

$$\frac{e_1}{e_0} = \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x_0)^2}{-f'(x_0)(x^* - x_0)} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)(x^* - x_0)}{f'(x_0)} = \frac{f''(\xi)f(x_0)}{2f'(x_0)f'(\eta)}$$

若 $f'(x), f''(x)$ 在 x_0 附近变化不大, 可用 $f'(x_0), f''(x_0)$ 近似代替 $f'(\xi), f''(\eta)$ 。

牛顿迭代法

若 $f'(x), f''(x)$ 在 x_0 附近变化不大, 可用 $f'(x_0), f''(x_0)$ 近似代替 $f'(\xi), f''(\eta)$ 。于是, 只要 $f'(x_0) \neq 0$, 就有近似公式

$$\frac{e_1}{e_0} \approx \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

牛顿迭代法

若 $f'(x), f''(x)$ 在 x_0 附近变化不大, 可用 $f'(x_0), f''(x_0)$ 近似代替 $f'(\xi), f''(\eta)$ 。于是, 只要 $f'(x_0) \neq 0$, 就有近似公式

$$\frac{e_1}{e_0} \approx \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

要使牛顿法收敛, 则误差必须减少, 即 $|e_1| < |e_0|$, 亦即

$$[f'(x_0)]^2 > \left| \frac{f''(x_0)}{2} \right| \cdot |f(x_0)| \quad (*)$$

牛顿迭代法

若 $f'(x), f''(x)$ 在 x_0 附近变化不大, 可用 $f'(x_0), f''(x_0)$ 近似代替 $f'(\xi), f''(\eta)$ 。于是, 只要 $f'(x_0) \neq 0$, 就有近似公式

$$\frac{e_1}{e_0} \approx \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

要使牛顿法收敛, 则误差必须减少, 即 $|e_1| < |e_0|$, 亦即

$$[f'(x_0)]^2 > \left| \frac{f''(x_0)}{2} \right| \cdot |f(x_0)| \quad (*)$$

初值的选取

若在 x_0 处, $f(x)$ 满足式(*)且 $f'(x_0) \neq 0$, 就可用 x_0 作为牛顿法的初值。

计算步骤

(1) 准备

选取初值 x_0 , 计算 $f(x_0)$, $f'(x_0)$

(2) 迭代

依公式

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

迭代一次得新近似值 x_1 , 并计算 $f(x_1)$, $f'(x_1)$

(3) 控制

若 $|f(x_1)| < \epsilon$, 则终止迭代, x_1 即为所求的根; 否则转(4)

(4) 准备迭代

若迭代次数超过预先指定的次数 N , 或 $f'(x_1) = 0$, 则方法失败;

否则

$$x_1 \rightarrow x_0, f(x_1) \rightarrow f(x_0), f'(x_1) \rightarrow f'(x_0),$$

例

用牛顿迭代法求解 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $[1.4, 1.5]$ 内的根

例

用牛顿迭代法求解 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $[1.4, 1.5]$ 内的根

解

令 $f(x) = x^3 - x^2 - 1$

(1) 牛顿迭代公式为 $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 2x_n}$

(2) 判断牛顿迭代法的收敛性

$$f(1.4) \approx -0.2, \quad f(1.5) \approx 0.2,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x > 0 \quad (x \in [1.4, 1.5]),$$

$$f''(x) = 6x - 2 > 0 \quad (x \in [1.4, 1.5]),$$

因为 $f(1.5)f''(1.5) > 0$ ，故可选取初值 $x_0 = 1.5$ ，此时牛顿迭代法收敛。

表 3: 计算结果

n	x_n	$ x_{n+1} - x_n \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$
0	$x_0 = 1.5$	
1	$x_1 = 1.466667$	$ x_2 - x_1 \approx 0.04$
2	$x_2 = 1.465572$	$ x_3 - x_2 \approx 0.002$
3	$x_3 = 1.465571$	$ x_4 - x_3 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

例

用牛顿法求方程

$$f(x) = x^{41} + x^3 + 1 = 0$$

在 $x_0 = -1$ 附近的实根，精确到小数点后第 4 位。

例

用牛顿法求方程

$$f(x) = x^{41} + x^3 + 1 = 0$$

在 $x_0 = -1$ 附近的实根，精确到小数点后第 4 位。

解

(1) 牛顿迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{41} + x_n^3 + 1}{41x_n^{40} + 3x_n^2}$$

(2) 判断收敛性

$$f'(x) = 41x^{40} + 3x^2, \quad \frac{1}{2}f''(x) = 820x^{39} + 3x,$$

$$f(-1) = -1, \quad f'(-1) = 44, \quad \frac{1}{2}f''(-1) = -823,$$

$$[f'(-1)]^2 = 44^2 = 1936 > |\frac{1}{2}f''(-1)| \cdot |f(-1)| = 823$$

表 4: 计算结果

n	x_n
0	$x_0 = -1$
1	$x_1 = -0.9773$
2	$x_2 = -0.9605$
3	$x_3 = -0.9525$
4	$x_4 = -0.9525$

牛顿迭代法

例

用牛顿法建立计算 $\sqrt{C}(C > 0)$ 近似值的迭代公式。

牛顿迭代法

例

用牛顿法建立计算 $\sqrt{C}(C > 0)$ 近似值的迭代公式。

解

$$x = \sqrt{C} \implies f(x) = x^2 - C = 0$$

牛顿迭代法

例

用牛顿法建立计算 $\sqrt{C}(C > 0)$ 近似值的迭代公式。

解

$$x = \sqrt{C} \implies f(x) = x^2 - C = 0$$

(1) 牛顿迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - C}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{C}{x_n} \right)$$

(2) 收敛性判别

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f'' = 2 > 0$, 故任意选取 $x_0 > \sqrt{C}$ 作为初值, 迭代序列必收敛到 \sqrt{C} , 故迭代公式是收敛的。

牛顿迭代法

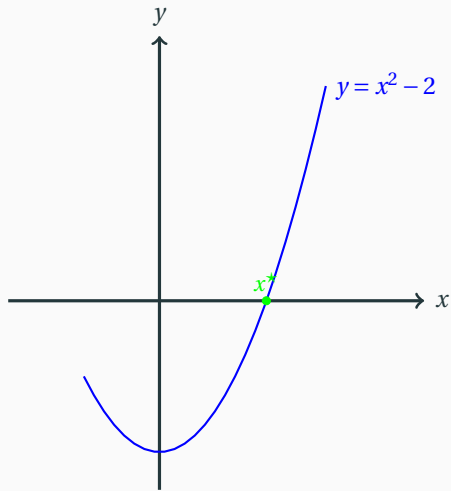


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

牛顿迭代法

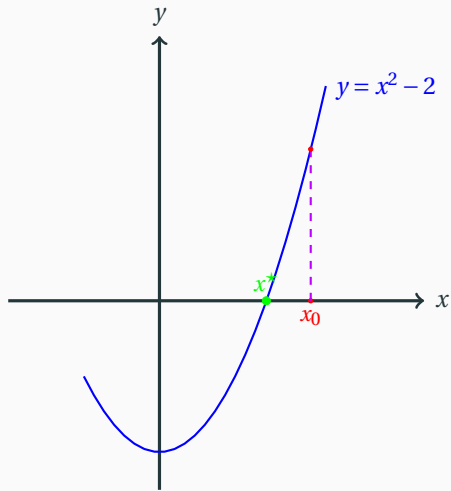


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

牛顿迭代法

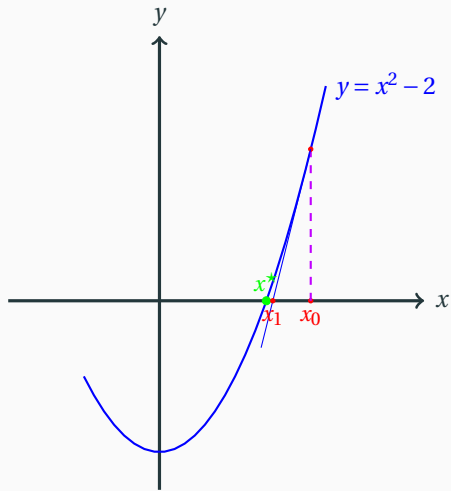


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

牛顿迭代法

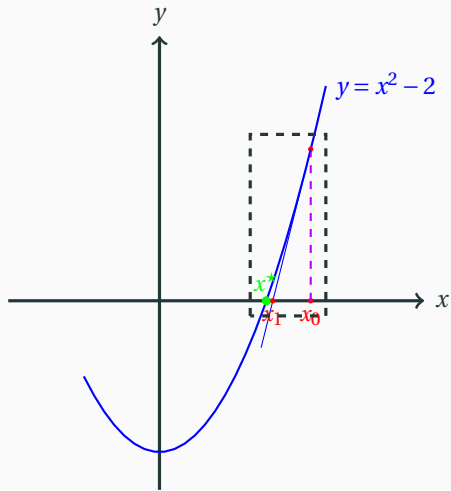


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

牛顿迭代法

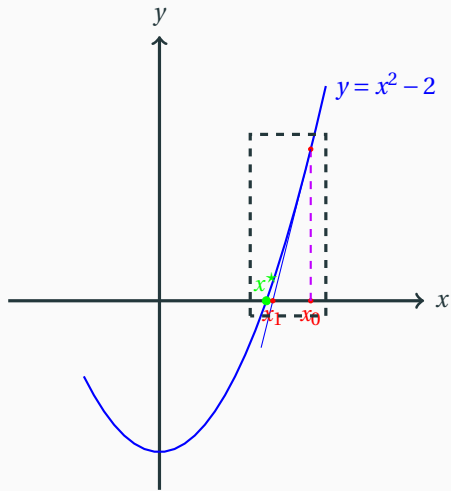


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$



图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

牛顿迭代法

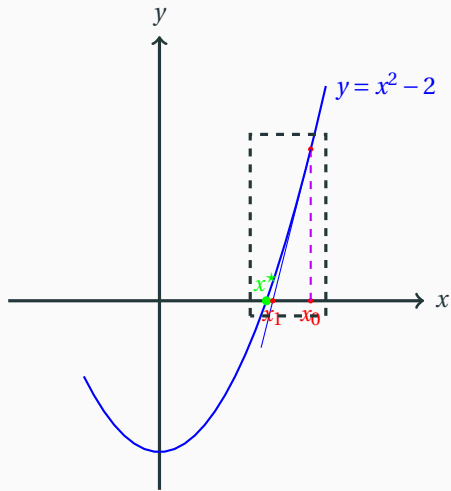


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

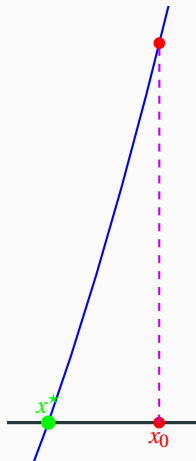


图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

牛顿迭代法

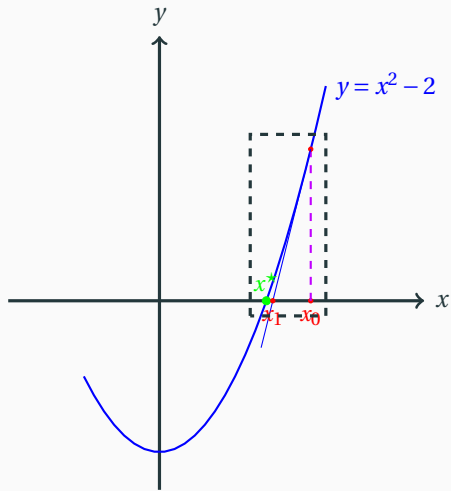


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

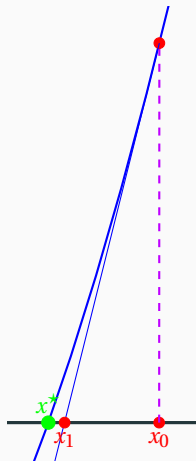


图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

牛顿迭代法

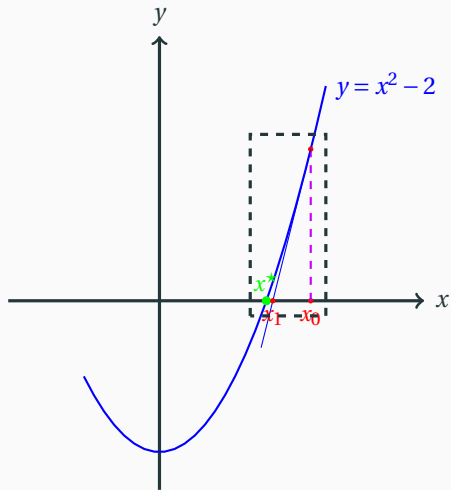


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

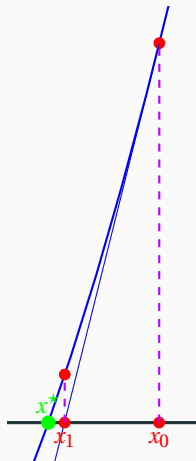


图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

牛顿迭代法

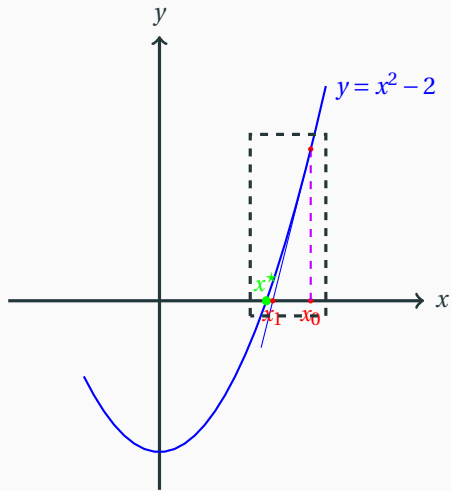


图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

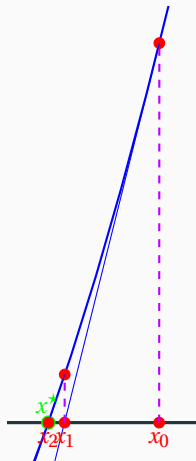


图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ (局部放大)

定义：迭代法的收敛阶

设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 x^* ，令误差 $e_n = x_n - x^*$ ，若存在某个实数 $p \geq 1$ 及常数 $C > 0$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为 p 阶收敛，相应的迭代法是 p 阶方法。

- 线性收敛： $p = 1$ 且 $0 < C < 1$
- 平方收敛： $p = 2$
- 超线性收敛： $p > 1$

定义：迭代法的收敛阶

设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 x^* ，令误差 $e_n = x_n - x^*$ ，若存在某个实数 $p \geq 1$ 及常数 $C > 0$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为 p 阶收敛，相应的迭代法是 p 阶方法。

- 线性收敛： $p=1$ 且 $0 < C < 1$
- 平方收敛： $p=2$
- 超线性收敛： $p > 1$

p 越大，数列收敛越快。故迭代法的收敛阶是对迭代法收敛速度的一种度量。

定理

- (1) 若在根 x^* 的某个邻域内有 $\varphi'(x) \neq 0$, 则不动点迭代**线性收敛**
- (2) 若在根 x^* 的某个邻域内连续, 且有

$$\varphi'(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$, 则不动点迭代 **p 阶收敛**

- (3) 牛顿迭代**平方收敛**

弦截法

弦截法

对于牛顿迭代法，

优点

- 1 迭代格式自动生成
- 2 收敛速度快，具有 2 阶精度

弦截法

对于牛顿迭代法,

优点

- 1 迭代格式自动生成
- 2 收敛速度快, 具有 2 阶精度

缺点

- 1 对初值敏感
- 2 每次迭代都需要计算 f 的导数

当 f 比较复杂时, 计算 f 的导数就可能十分麻烦, 特别是当 $f'(x_k)$ 很小时, 必须精确计算, 否则会产生很大的误差

弦截法

对于牛顿迭代法，

优点

- 1 迭代格式自动生成
- 2 收敛速度快，具有 2 阶精度

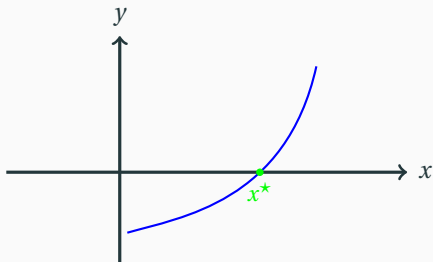
缺点

- 1 对初值敏感
- 2 每次迭代都需要计算 f 的导数

当 f 比较复杂时，计算 f 的导数就可能十分麻烦，特别是当 $f'(x_k)$ 很小时，必须精确计算，否则会产生很大的误差

本节介绍的弦截法，不需要计算导数，其收敛速度低于牛顿迭代法但高于不动点迭代法。

弦截法



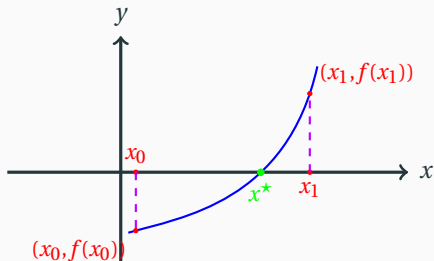
- (1) 设方程 $f(x) = 0$ 的一个隔根区间为 $[a, b]$, 连接 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$, 得弦的方程为

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

弦截法



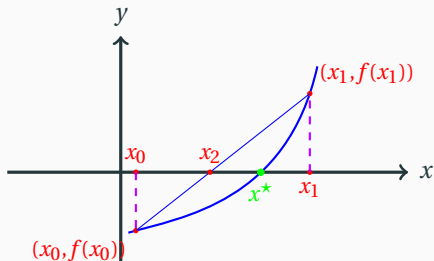
- (1) 设方程 $f(x) = 0$ 的一个隔根区间为 $[a, b]$, 连接 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$, 得弦的方程为

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

弦截法



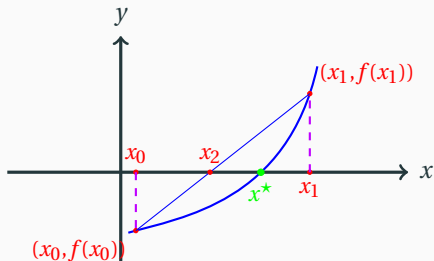
- (1) 设方程 $f(x) = 0$ 的一个隔根区间为 $[a, b]$, 连接 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$, 得弦的方程为

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

弦截法



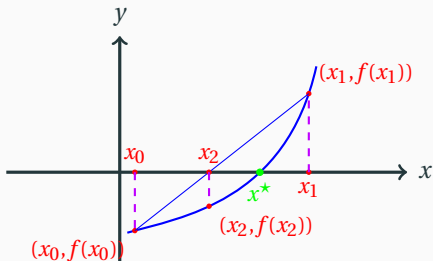
(2) 以 x_2 为 x^* 的近似值, 连接 $(x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$, 得弦的方程为

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)$$

弦截法



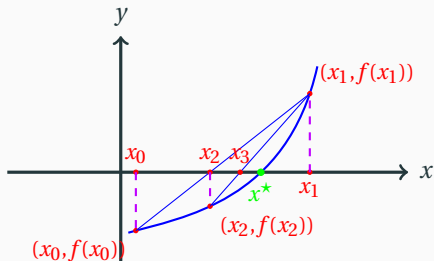
(2) 以 x_2 为 x^* 的近似值, 连接 $(x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$, 得弦的方程为

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)$$

弦截法



(2) 以 x_2 为 x^* 的近似值, 连接 $(x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$, 得弦的方程为

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)$$

弦截法

如此下去，即可得到迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

该方法称为弦截法。

如此下去，即可得到迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

该方法称为**弦截法**。

几何意义： 依次用弦线代替曲线，用线性函数的零点作为函数 $f(x)$ 零点的近似值。

计算步骤

- (1) **准备** 选取初值 x_0, x_1 , 计算 $f(x_0), f(x_1)$
- (2) **迭代** 依公式

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

迭代一次得新近似值 x_2 , 并计算 $f(x_2)$

- (3) **控制** 若 $|f(x_2)| < \epsilon_1$ 或 $|x_2 - x_1| < \epsilon_2$, 则终止迭代, x_2 即为所求的根; 否则转(4)
- (4) **准备迭代** 若迭代次数超过预先指定的次数 N , 则方法失败; 否则

$$(x_1, f(x_1)) \rightarrow (x_0, f(x_0)), \quad (x_2, f(x_2)) \rightarrow (x_1, f(x_1)).$$

转(2)继续迭代

定理

条件

- f 在 x^* 的某邻域 S 内有二阶连续导数
- $\forall x \in S$, 有 $f'(x) \neq 0$

结论

- 当 S 充分小时, $\forall x_0, x_1 \in S$, 弦截法生成的迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x^*
- 弦截法的收敛速度为 $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

牛顿法与弦截法的区别

顿法和弦截法都是先将 $f(x)$ 线性化后再求根（化曲为直），但线性化方式不同：

- 牛顿法是作切线的方程
- 弦截法是作弦线的方程

另外

- 牛顿法只需一个初值
- 弦截法需要两个初值