计算方法

非线性方程的数值解法

1. 已知方程 $e^x + 10x - 4 = 0$ 在 $[0, 0.4]$ 内有唯一根。
   a) 试分析迭代格式 $A : x_{n+1} = \ln(4 - 10x_n)$ 和 $B : x_{n+1} = \frac{1}{10}(4 - e^{x_n})$ 的收敛性；
   b) 写出求解此方程的牛顿迭代格式。
2. 设 $f(x)$ 可导，且 $0 < m \leq f'(x) \leq M$。证明：对于满足 $0 < \lambda < \frac{2}{M}$ 的任意常数 λ，迭代格式 $x_{n+1} = x_n - \lambda f(x_n)$ 均收敛于 $f(x) = 0$ 的根 a.
3. 设有方程
   $$f(x) = x^2 + \ln x - 4 = 0,$$
   a) 证明该方程在区间 $[1, 2]$ 内有唯一根 x^*；
   b) 讨论用两迭代格式 $A : x_{n+1} = \sqrt{4 - \ln x_n}$ 和 $B : x_{n+1} = e^{4-x_n^2}$ 求区间 $[1, 2]$ 内的根的收敛性。
4. 已知方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $[1.4, 1.5]$ 内有唯一根。
   a) 分析迭代格式 $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n^2}$ 的收敛性
   b) 写出求此根的牛顿迭代格式，并问初值 x_0 取何值时牛顿迭代必收敛。
5. 应用牛顿法于方程 $f(x) = x^n - a = 0$ 和 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^n} = 0$，分别导出求 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代格式，并求
   $$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2}.$$