计算方法

第二次作业

1. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{A}$ 的行范数，列范数，谱范数及 F 范数.

2. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

求 $\|\boldsymbol{Ax}\|_1, \rho(\boldsymbol{A}), \kappa_\infty(\boldsymbol{A})$. 注：$\kappa(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的条件数，也常被写成 $Cond(\boldsymbol{A})$

3. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求 $\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty, \rho(\boldsymbol{A}), \kappa_\infty(\boldsymbol{A})$.

4. 若矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

说明对任何实数 $a \neq 0$, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 都是非病态的 (范数用 $\|\cdot\|_\infty$).

5. 给定方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } a_{11}a_{22} \neq 0$$

分别写出 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代格式，并证明这两种迭代格式同时收敛或同时发散.

6. 给定方程组

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ a & b & a \\ 0 & a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d_i\text{都是常数，} abc \neq 0.$$

   a) 写出 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代格式；
   b) 写出 Jacobi 迭代格式的收敛性.

7. 给定方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

   a) 写出 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代格式；

   b) 问常数 a 取何值时，Jacobi 迭代格式收敛.

8. 设线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

   证明用 Jacobi 迭代格式收敛，而用 Gauss-Seidel 迭代不收敛.

9. 设线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

   证明用 Jacobi 迭代格式不收敛，而用 Gauss-Seidel 迭代收敛.

10. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

   证明

   a) 当 $a \in (-0.5, 1)$ 时，$\boldsymbol{A}$ 正定；

   b) 当 $a \in (-0.5, 0)$ 时，用 Jacobi 迭代法求解 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 收敛.