线性代数
线性方程组

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 11 月 21 日

目录

目录

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵。若将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n),$$

则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0}.$$

重要结论

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的秩为 r，其对应的列向量组为 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^m$，则

- $$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ 有非零解} &\iff \text{向量组 } A \text{ 线性相关} \\ &\iff r < n \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ 只有零解} &\iff \text{向量组 } A \text{ 线性无关} \\ &\iff r = n \end{aligned}$$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：存在 $n \times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$，使得 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}| = 0.$$

证明.

$|\boldsymbol{A}| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解。下证

存在 $n \times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B} \neq 0$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解.

- ($\Longrightarrow$) 设 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量为 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解。又 $\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个非零列向量，从而 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 至少有一个非零解。
- ($\Longleftarrow$) 设 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解，任取一个非零解 $\boldsymbol{\beta}$，令

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{0},\ \cdots,\ \mathbf{0})$$

则 $\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$。

□

定理

若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的两个解，则

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2 \quad (k_1，k_2\text{为任意常数})$$

也是它的解。

证明.

因为

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=k_1\mathbf{0}+k_2\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

故 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解。 □

定义 (基础解系)

设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，若

(1) $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性无关

(2) 任一解向量可由 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性表示。

则称 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

注

(1) 基础解系即全部解向量的极大无关组。

(2) 找到了基础解系，就找到了齐次线性方程组的全部解：

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p \quad (k_1,k_2,\cdots,k_p\text{为任意常数}).$$

(3) 基础解系不唯一。

例

求方程组

$$x + y + z = 0$$

的全部解。

解

(1) 选取 y, z 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

解

(2) 选取 x, z 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = x \\ y = -x - z \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

解

(3) 选取 x, y 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x &= & & x & & \\ y &= & & & & y \\ z &= & - & x & - & y \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

解

三个不同的基础解系为

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

定理

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，若 $r(\boldsymbol{A}) = r < n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 存在基础解系，且基础解系含 $n - r$ 个解向量。

注

- r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵的非零行行数，是非自由未知量的个数。
- n 为未知量的个数，故 $n - r$ 为自由未知量的个数。有多少自由未知量，基础解系里就对应有多少个向量。

例

求齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 4]{r_3\div 8} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解

原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例

求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

解

原方程等价于 $x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}$，即

$$\begin{cases} x_1 &= x_1 & & & \\ x_2 &= & x_2 & & \\ &\vdots & & & \\ x_{n-1} &= & & & x_{n-1} \\ x_n &= -nx_1 & -(n-1)x_2 & \cdots & -2x_{n-1} \end{cases}$$

基础解系为

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$。证明：

$$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leq n.$$

证明.

由 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 知，$\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解。由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系线性表示，故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩，不超过 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系的秩，即

$$r(\boldsymbol{B}) \leq n - r(\boldsymbol{A}),$$

即

$$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leq n.$$

□

例

设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解，证明

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}).$$

解

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解，故它们有相同的基础解系，而基础解系包含的向量个数相等，即

$$n-r(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{B}),$$

从而

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}).$$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，证明 $r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$。

证明.

只需证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解。

(1) 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则有 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$。

(2) 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。

$\square$

目录

定理

对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，以下命题等价：

(i) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

(ii) $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

(iii) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$。

证明.

- (i)⇔(ii) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

- (ii)⇔(iii) 若 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价，故 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$。

  反之，若 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$，则 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，否则 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})+1$，导致矛盾。

$\square$

非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

注

$r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A}) + 1$ 会导致矛盾方程的出现。

记 $r(\boldsymbol{A}) = r$，若 $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A}) + 1$，则增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 经过初等行变换所得的行阶梯形矩阵形如

$$\left(\begin{array}{cccccc:c} 1 & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $d_{r+1} \neq 0$（否则 $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r$）。这意味着出现了矛盾方程

$$0 = d_{r+1}.$$

推论

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{有唯一解} \iff r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\text{的列数}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

定理

若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

证明.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。 □

定理

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解，则其通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，而

$$\bar{\boldsymbol{x}}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p$$

为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解。

证明.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}\text{是}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{的解}$$

设 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解，则 $\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，而

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}_0+(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_0).$$

故 $\boldsymbol{x}^*$ 可表示为 $\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}$ 的形式。 □

非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

的通解为

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_0$$

其中 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{x}_0$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解。

注

“$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解”= “$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解”+ “$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的特解”

例

求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一般解，其中增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1, r_1+r_2]{r_2 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解

同解方程为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例 (重要题型)

设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组

(1) 有唯一解?

(2) 无解?

(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

解

由

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

可知，当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，有唯一解。

解

当 $\lambda = 0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

解

当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

例

设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，证明：

- $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关
- $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关

证明.

(1) 假设 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\eta}^*$ 可由 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，这与 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解矛盾。故假设不成立，即 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关。

(2) 显然，

$$\boldsymbol{\eta}^*,\ \boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad \text{等价于}\quad \boldsymbol{\eta}^*,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

由题 (1) 结论可知

$$r(\boldsymbol{\eta}^*,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=r(\boldsymbol{\eta}^*,\ \boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r})=n-r+1$$

从而结论成立。

$\square$

例

设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，k_1，k_2，$\cdots$，k_s 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。证明：

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

证明.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s) &= k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_s\\ &= k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_s\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

□

例

对于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, $r(\boldsymbol{A})=r$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 为它的 $n-r+1$ 个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$。

证明.

取向量组 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$. 下证该向量组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) \xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1} (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\text{线性无关}\\
\Rightarrow\ & \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关}\\
\Rightarrow\ & \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关}\\
\Rightarrow\ & \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{为}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{的基础解系.}
\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{x}$ 可表示为

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{x}=k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1\\
\Rightarrow\ & \boldsymbol{x}=(1-k_2-\cdots-k_{n+r-1})\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\
\Rightarrow\ & \boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}
\end{aligned}$$

□

例

设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}:\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}:\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$$

求

(1) 方程组 I 与 II 的基础解系

(1) 方程组 I 与 II 的公共解

解

(1) 因为 *I* $\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 &= & -x_2 \\ x_4 &= & x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 &= & -x_2 & \\ x_2 &= & x_2 & \\ x_3 &= & & x_3 \\ x_4 &= & x_2 & \end{cases}$

故 *(I)* 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解

因为 *II* $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrr} x_1 & = & x_2 & -x_3 \\ x_4 & = & -x_2 & +x_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrr} x_1 & = & x_2 & -x_3 \\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3 \\ x_4 & = & -x_2 & +x_3 \end{array}\right.$

故 *(II)* 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解

(2) 方程 *I* 与 *II* 的公共解，即联立 *I* 和 *II* 所得新方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_4 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & = & x_2 \\ x_3 & = & 2x_2 \\ x_4 & = & x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c \in \mathbb{R}.$$