



线性代数

矩阵的初等变换与分块矩阵

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 11 月 8 日



1 矩阵的初等变换与初等矩阵

2 矩阵分块

1 矩阵的初等变换与初等矩阵

2 矩阵分块

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

- ① 交换两行
- ② 以非零常数 k 乘矩阵的某一行
- ③ 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行

表: 矩阵的初等行变换

交换变换	$r_i \leftrightarrow r_j$
倍乘变换	$r_i \times k$
倍加变换	$r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换。

表: 初等变换及其逆变换

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \div k$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

定义 (矩阵的等价)

- ① 如果 A 经过有限次初等行变换变成 B , 就称 A 与 B 行等价, 记为 $A \stackrel{r}{\sim} B$
- ② 如果 A 经过有限次初等列变换变成 B , 就称 A 与 B 列等价, 记为 $A \stackrel{c}{\sim} B$
- ③ 如果 A 经过有限次初等变换变成 B , 就称 A 与 B 等价, 记为 $A \sim B$.

矩阵等价的性质

- 反身性: $A \sim A$
- 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$
- 传递性: 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$

定义 (初等矩阵)

将单位矩阵 I 做一次初等变换所得的矩阵称为**初等矩阵**。对应于 3 类初等行、列变换，有 3 种类型的初等矩阵：

- 初等交换矩阵
- 初等倍乘矩阵
- 初等倍加矩阵

矩阵的初等变换与初等矩阵

初等交换矩阵

定义 (初等交换矩阵)

将单位矩阵 I 交换两行或交换两列所得的矩阵, 被称为**初等交换矩阵**。

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & & 1 \\ & & & 1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ & 1 & \cdots & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

第 i 列 第 j 列

初等交换矩阵的作用

- $m \times n$ 矩阵 A 左乘 m 阶初等交换矩阵 E_{ij} , 其结果相当于: 把 A 的第 i 行与第 j 行对调 ($r_i \leftrightarrow r_j$)
- $m \times n$ 矩阵 A 右乘 n 阶初等交换矩阵 E_{ij} , 其结果相当于: 把 A 的第 i 列与第 j 列对调 ($c_i \leftrightarrow c_j$)

矩阵的初等变换与初等矩阵

初等倍乘矩阵

定义 (初等倍乘矩阵)

用非零常数 k 乘单位矩阵 I 的某行或某列所得的矩阵，被称为**初等倍乘矩阵**。

$$E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & k & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \end{pmatrix}$$

第 i 行

第 i 列

矩阵的初等变换与初等矩阵

初等倍乘矩阵

初等倍乘矩阵的作用

- $m \times n$ 矩阵 A 左乘 m 阶初等倍乘矩阵 $E_i(k)$, 其结果相当于: 用数 k 乘 A 的第 i 行 ($r_i \times k$)
- $m \times n$ 矩阵 A 右乘 n 阶初等倍乘矩阵 $E_i(k)$, 其结果相当于: 用数 k 乘 A 的第 i 列 ($c_i \times k$)

矩阵的初等变换与初等矩阵

初等倍加矩阵

定义 (初等倍加矩阵)

用非零常数 k 乘单位矩阵 I 的某行 (某列) 然后加至另一行 (列) 所得的矩阵, 被称为**初等倍加矩阵**。

$$E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第 i 行
第 j 行
第 i 列第 j 列

初等倍加矩阵的作用

- $m \times n$ 矩阵 A 左乘 m 阶初等倍加矩阵 $E_{ij}(k)$, 其结果相当于把 A 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上 ($r_i + r_j \times k$)
- $m \times n$ 矩阵 A 右乘 n 阶初等倍加矩阵 $E_{ij}(k)$, 其结果相当于把 A 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上 ($c_j + c_i \times k$)

定理

设 A 为一个 $m \times n$ 矩阵,

- 对 A 施行一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;
- 对 A 施行一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

表: 矩阵初等变换总结

初等变换	含义
$E_{ij}A$	交换 A 的第 i 行与第 j 行
$E_i(k)A$	A 的第 i 行乘以 k
$E_{ij}(k)A$	A 的第 j 行乘以 k 加至第 i 行
AE_{ij}	交换 A 的第 i 列与第 j 列
$AE_i(k)$	A 的第 i 列乘以 k
$AE_{ij}(k)$	A 的第 i 列乘以 k 加至第 j 列

矩阵的初等变换与初等矩阵

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

① 变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换为其本身 $\implies \mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

② 变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$ $\implies \mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

③ 变换 $r_i + r_j \times k$ 的逆变换为 $r_i - r_j \times k$ $\implies \mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

例

设初等矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求 $P_1 P_2 P_3$ 及 $(P_1 P_2 P_3)^{-1}$.

解

$$P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 P_2 P_3 = P_1 (P_2 P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解【续】

$$(P_1 P_2 P_3)^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2^{-1} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明.

对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换，并一定可以将其化为行最简形。因此，对于任何矩阵 A ，都可经过初等行变换将其化为行最简形 U ，即存在初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = U$$

由于可逆矩阵的行最简形必为单位阵，即 $U = I$ 。 □

推论

可逆矩阵 A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明

由上述定理，必存在初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = I,$$

于是

$$A = (P_s \cdots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$$

推论

如果对可逆矩阵 A 与同阶单位矩阵 I 做同样的初等行变换，那么当 A 变为单位阵时， I 就变为 A^{-1} ，即

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

同理，

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例

求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$\begin{aligned} (A | I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1+r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例

已知 $ABA^T = 2BA^T + I$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B

解

由

$$ABA^T = 2BA^T + I \Rightarrow (A - 2I)BA^T = I \Rightarrow BA^T = (A - 2I)^{-1}$$

知

$$B = (A - 2I)^{-1}(A^T)^{-1}.$$

而

$$(A - 2I)^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$B = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

推论

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$Ax = b,$$

如果增广矩阵

$$(A, b) \sim (I, x),$$

则 A 可逆, 且 $x = A^{-1}b$ 为惟一解。

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求 $Ax = b_1$ 与 $Ax = b_2$ 的解。

解

$$\begin{aligned} (A \mid b_1 \quad b_2) &= \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_3 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \div 5}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - 2r_2 + 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例

求解矩阵方程 $AX = A + X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解

原方程等价于 $(A - I)X = A$

$$(A - I | A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例

当 a, b 满足什么条件时, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 不可逆。

解

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\substack{c_1 \leftrightarrow c_2 \\ c_2 \leftrightarrow c_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1 \times (-4) \\ r_4 + r_1 \times (-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_3 + r_2 \\ r_4 + r_2 \times (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由此可知, $|A| = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & b-2 \\ a-1 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)(b-2)$ 。于是, 当 $(a-1)(b-2) = 0$, 即 $a = 1$ 或 $b = 2$ 时, A 不可逆。

1 矩阵的初等变换与初等矩阵

2 矩阵分块

设有 3×4 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

它可表示为分块矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

矩阵的按行分块

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$$

矩阵的按列分块

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_s)$$

其中

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

准对角矩阵 (quasi-diagonal matrix)

当 n 阶矩阵 A 中非零元素都集中在主对角线附近, 有时可分块成如下**准对角矩阵**

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

其中 A_i 为 r_i 阶方阵 ($i = 1, 2, \dots, m$), 且

$$\sum_{i=1}^m r_i = n.$$

例

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

分块矩阵的加法

设 A, B 为同型矩阵, 采用相同的分块法, 有

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 为同型矩阵, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的数乘

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的乘法

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times l$ 矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{is}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{sj}$ 的行数, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix},$$

其中

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj}.$$

例

用分块矩阵的乘法计算 AB , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ A_1 B_1 - I_3 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 B_1 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

例

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵。

- 将 B 按列分块成 $1 \times s$ 分块矩阵, 将 A 看成 1×1 分块矩阵, 则

$$AB = A(b_1, b_2, \dots, b_s) = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s)$$

- 若已知 $AB = 0$, 则显然

$$Ab_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

因此, B 的每一列 b_j 都是线性方程组 $Ax = 0$ 的解。

例

设 A 为实矩阵且 $A^T A = 0$, 证明 $A = 0$.

证明.

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 把 A 用列向量表示为 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

因为 $A^T A = 0$, 故

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

特别地, 有

$$\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

即

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 0 \Rightarrow a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0 \Rightarrow A = 0.$$



例

若 n 阶矩阵 C, D 可以分块成同型准对角矩阵, 即

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & C_m \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & D_m \end{pmatrix}$$

其中 C_i 和 D_i 为同阶方阵 ($i = 1, 2, \dots, m$), 则

$$CD = \begin{pmatrix} C_1D_1 & & & \\ & C_2D_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & C_mD_m \end{pmatrix}$$

例

证明：若方阵 A 为可逆的上三角阵，则 A^{-1} 也为上三角阵。

证明

对阶数 n 用数学归纳法。

- 1 当 $n = 1$ 时， $(a)^{-1} = (\frac{1}{a})$ ，结论成立。
- 2 假设命题对 $n - 1$ 阶可逆上三角矩阵成立，考虑 n 阶情况，设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

其中 A_1 为 $n - 1$ 阶可逆上三角阵。

证明【续】

设 A 的逆阵为

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \gamma = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \alpha\gamma & a_{11}\beta + \alpha B_1 \\ A_1\gamma & A_1B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$A_1\gamma = \mathbf{0} \Rightarrow \gamma = \mathbf{0},$$

$$A_1B_1 = I_1 \Rightarrow B_1 = A_1^{-1}.$$

由归纳假设, B_1 为 $n-1$ 阶上三角矩阵, 因此

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \mathbf{0} & B_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。

分块矩阵的转置

分块矩阵 $A = (A_{kl})_{s \times t}$ 的转置矩阵为

$$A^T = (B_{lk})_{t \times s},$$

其中 $B_{lk} = A_{kl}^T$.

例

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$$

$$B \xrightarrow{\text{按行分块}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = (b_1^T \quad b_2^T \quad \cdots \quad b_m^T)$$

可逆准对角矩阵的逆矩阵

对于准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

- 由于其行列式为 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_m|$ ，故准对角矩阵 A 可逆的充要条件为

$$|A_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

- 若准对角矩阵 A 可逆，则其逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$$

- 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- 一个 2×2 的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

例

设 $A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 B, D 皆为可逆矩阵, 证明 A 可逆并求 A^{-1} .

证明.

因 $|A| = |B||D| \neq 0$, 故 A 可逆. 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$$

由此可知

$$BX = I \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1}$$

$$BY = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbf{0}$$

$$CX + DZ = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad Z = -D^{-1}CB^{-1}$$

$$CY + DT = I \quad \Rightarrow \quad T = D^{-1}$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

□

分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵

对于分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

同样可以定义它的 3 类初等行变换与列变换，并相应地定义 3 类分块矩阵：

- 分块交换矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ I_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- 分块倍乘矩阵 (C_1, C_2 为可逆阵)

$$\begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 \end{pmatrix}$$

- 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ C_3 & I_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} I_m & C_4 \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}$$

例

设 n 阶矩阵 A 分块表示为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中 A_{11}, A_{22} 为方阵, 且 A 与 A_{11} 可逆. 证明: $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆, 并求 A^{-1} .

解

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{I} \end{array} \right) & \xrightarrow[\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]{r_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot r_1} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} \\ & \mathbf{Q} & -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{r_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \cdot r_2} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & & \mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \\ & \mathbf{Q} & -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[\mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot r_1]{\mathbf{Q}^{-1} \cdot r_2} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{I} & & \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix}$$

例

设 $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 且 A 可逆, 证明: $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$.

证明

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - CA^{-1} \cdot r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

由于分块倍加矩阵的行列式为 1, 即分块倍加变换不改变行列式的值, 故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|.$$

例

设 A 与 B 均为 n 阶分块矩阵, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|$$

证明

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{pmatrix} A-B & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$$

由于分块倍加矩阵的行列式为 1, 即分块初等变换不改变行列式的值, 故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ A+B & A+B \end{vmatrix} = |A-B| |A+B|.$$