一. 计算以下二阶行列式

1.

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$$

解:

$$\text{原式} = a^2b^2 - (ab)(ab) = 0.$$

2.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

解:

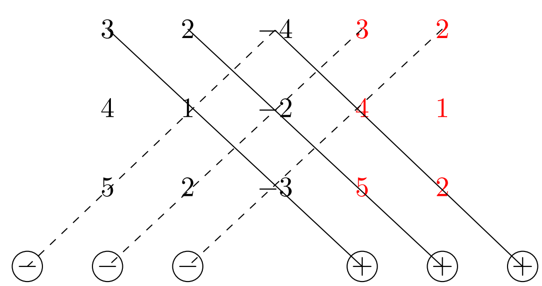
$$\text{原式} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

二. 计算以下三阶行列式

1.（使用沙路法）

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

解:



$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3\cdot 1\cdot(-3) + 2\cdot(-2)\cdot 5 + (-4)\cdot 4\cdot 2 - (-4)\cdot 1\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot(-3) \\ &= -9 - 20 - 32 + 20 + 12 + 24 = -5. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

解:

$$
原式 \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 198 & 102 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 198 & 102 \end{vmatrix} = -3 \cdot (2 \cdot 102 - 198) = -18.
$$

3.

$$
\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}
$$

解:

注意到 $\omega^3 = 1$，故

$$
\omega \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^3 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,
$$

从而

$$
原式 = 0.
$$

4.

$$
\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}.
$$

解:

$$
原式 \xlongequal[r_3-xr_1]{r_2-xr_1} \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 2-x^2 & x-x^2 \\ 0 & x-x^2 & 3-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x^2 & x-x^2 \\ x-x^2 & 3-x^2 \end{vmatrix}
$$

$$
= (2-x^2)(3-x^2) - (x-x^2)^2 = 2x^3 - 6x^2 + 6.
$$

三. 计算以下行列式

1.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 8 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

解:

$$原式 \quad = (-1)^{10+10} \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 8 & \cdots & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-1)^{\frac{9\times 8}{2}} 9! = 10!$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解:

$$原式 \quad \xlongequal[i=4,3,2]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{c_i - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{c_i \div 4} 4^3 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} 4^3 \begin{vmatrix} 1 + \frac{1+2+3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4^3 \frac{10}{4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 160.$$

四. 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解:

$$\text{原式} \xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^3 = -8.$$

五. 计算

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$\text{原式} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-r_2} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7.$$

六. 计算以下行列式

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-16) = 32.$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$\text{原式} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_5} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{3+2}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-10)\cdot 2 = -20.$$

七. 证明：

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

解:

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} b_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ b_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ b_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} b_1 & a_1x & c_1 \\ b_2 & a_2x & c_2 \\ b_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} b_1 & a_1x & c_1 \\ b_2 & a_2x & c_2 \\ b_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{右边}$$

八. 证明：

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

证:

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_1+c_4/y \\ c_1-c_5/y}]{\substack{c_1+c_2/x \\ c_1-c_3/x}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$= x^2y^2.$$

九. 计算

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$$

解:

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}_{n+1} = \left(1+\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right)\prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

十. 证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c).$$

证:

考察范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & y \\ a^2 & b^2 & c^2 & y^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & y^3 \end{vmatrix} = (y-a)(y-b)(y-c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

等式两端均为关于 y 的多项式，比较 y^2 的系数，可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)$$

十一. 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j).$$

证:

考察行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(y - x_i) \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

等式两端均为关于 y 的多项式，比较 y^{n-1} 的系数便得结论。

十二. 计算

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

解:

$$\text{左边} \xlongequal[c_2-c_1]{\substack{c_4-c_3\\ c_3-c_2}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

十三. 计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$原式 \xlongequal{r_3+r_1+r_2} \begin{vmatrix} a & b & a+b+c & 1 \\ b & c & a+b+c & 1 \\ c & a & a+b+c & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & a+b+c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

十四. 试证：三点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 位于一直线上的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证:

三点位于一直线上的充分必要条件是

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3},$$

即

$$(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_3)$$

亦即

$$x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

其行列式形式为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

十五. 求过 3 点 $(1, 1, 1)$, $(2, 3, -1)$, $(3, -1, -1)$ 的平面方程。

解:

设平面方程为

$$ax + by + cz + d = 0,$$

因 3 点位于平面上，故

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a + b + c + d = 0, \\ 2a + 3b - c + d = 0, \\ 3a - b - c + d = 0 \end{cases}$$

该齐次线性方程组有非零解，故其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$-8x - 2y - 6z + 16 = 0.$$

亦即

$$4x + y + 3z - 8 = 0.$$